UNTERSUCHUNG EINES SPEZIELLEN FALLES DES DREI- UND VIERKÖRPERPROBLEMS.

DER PHILOSOPHISCHEN FAKULTÄT

DER

K. LUDWIG-MAXIMILIANS-UNIVERSITÄT MÜNCHEN

ALS

INAUGURAL-DISSERTATION

VORGELEGT VON

ERNST ZAPP.

MÜNCHEN

DRUCK DER AKADEMISCHEN BUCHDRUCKEREI VON F. STRAUB

1908.

UNTERSUCHUNG EINES SPEZIELLEN FALLES DES DREI- UND VIERKÖRPERPROBLEMS.

DER PHILOSOPHISCHEN FAKULTÄT

DER

K. LUDWIG-MAXIMILIANS-UNIVERSITÄT MÜNCHEN

ALS

INAUGURAL-DISSERTATION

VORGELEGT VON

ERNST ZAPP.

MÜNCHEN
DRUCK DER AKADEMISCHEN BUCHDRUCKEREI VON F. STRAUB
1908.

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41547427_0045

Einleitung.

Für diejenige Untersuchung astronomischer Erscheinungen, welche sich mit der Bewegung der Himmelskörper beschäftigt, besitzen die mehrfachen Sternsysteme besondere Bedeutung. Nicht allein wegen des Nachweises, daß auch in diesen von uns entfernteren Regionen des Weltraumes das Newtonsche Gesetz der allgemeinen Gravitation das Band bildet, welches Sternmassen zu engeren Systemen von zwei, drei und mehr Gliedern verbindet, sondern auch für die Erkenntnis der Eigenschaften der Bewegungen, welche die Körper als Folge dieser gegenseitigen Anziehung ausführen.

Da die Auflösung dieses Grundproblems der Himmelsmechanik bereits für drei Körper in seiner allgemeinsten Form unmöglich erscheint, ist man zunächst genötigt, solche spezielle Fälle aufzusuchen, welche einer strengen Behandlung fähig sind, und muß versuchen, von diesen ausgehend in die Eigentümlichkeiten allgemeinerer Systeme einzudringen. Besonders kommen da diejenigen Fälle in Betracht, die sich als Störungsprobleme auffassen lassen und somit Reihenentwickelungen für die Lösungen ermöglichen.[1])

Die charakteristische dynamische Eigenschaft des Sonnensystems besteht in dem bedeutenden Überwiegen an Masse eines Gliedes des Systems über alle andern, so daß die gegenseitige Anziehung der Planeten der Sonnenanziehung gegenüber in erster Näherung vernachlässigt werden kann und sich lediglich als Störung der reinen Zentralbewegung geltend macht. Auf diesem Prinzip sind die verschiedenen Theorien der Planetenbewegung aufgebaut.

Solcherweise ist das Planetensystem ein spezieller Fall des allgemeinen Problems und im Anschluß an die Bemühungen, die beobachteten Bewegungen

---

[1]) Die Untersuchung dieses Gegenstandes enthält Abschnitt II.

der Planeten als Folge des Newtonschen Gesetzes darzustellen, und im Zusammenhang mit denselben sind die allgemeineren Untersuchungen über das Dreikörperproblem entstanden. Die Systeme, welche diesen Untersuchungen zu Grunde liegen, werden etwa realisiert durch die Sonne, Jupiter und einen der kleinen Planeten: Eine Masse A sehr groß, eine zweite B im Vergleich zu dieser klein, eine dritte C, deren Bewegung gesucht wird, unendlich klein, also unfähig, die Bewegung der beiden ersten zu stören, die in Keplerschen Ellipsen um den gemeinschaftlichen Schwerpunkt erfolgt.

Ganz anderen Verhältnissen begegnen wir nun in den mehrfachen Sternsystemen, in denen sich die vorhandenen Massen nur um wenige Vielfache voneinander unterscheiden; eine Möglichkeit der Entwickelung des Problems ähnlich der für das Planetensystem besteht hier nicht. Dafür aber stellen sie in anderer von jener wesentlich verschiedenen Weise eine Spezialisierung des Dreikörperproblems dar, welche auch gestattet, dasselbe als Störungsproblem zu behandeln. In jenen Untersuchungen bleibt der Anfangszustand des Systems der drei Körper im wesentlichen beliebig und die Entwickelbarkeit des Problems wird durch spezielle Werte der als Parameter auftretenden Massen bewirkt. Statt dessen kann man aber auch diese allgemein lassen und einen speziellen Anfangszustand des Systems voraussetzen und untersuchen, wie sich von hier aus der Bewegungsvorgang gestaltet. Einen solchen speziellen Fall zeigen uns jene Fixsternsysteme. Er besteht darin, daß zu einer Anfangsepoche die Entfernung zweier der Massen, etwa A und B, klein ist gegenüber der Entfernung der Masse C von dem Schwerpunkt S der beiden ersteren, mit dem Zusatz, daß die Anfangsgeschwindigkeiten der Körper derartige seien, daß dieser Charakter des Systems innerhalb eines gewissen endlichen Zeitraumes erhalten bleibt. Ist das Verhältnis $\frac{AB}{CS}$ hinreichend klein, so erfolgt die Bewegung von A und B umeinander und von C um S in erster Näherung in Keplerschen Ellipsen; die Störungen werden abhängig von dem Verhältnis $\frac{AB}{CS}$.

Man kann diesen speziellen Fall des Dreikörperproblems zu einem speziellen Fall des Vierkörperproblems dadurch verallgemeinern, daß man die Masse C durch zwei einander sehr benachbarte Massen C und D ersetzt. Man gelangt so zu einem System von zwei Doppelplaneten. In typischer Weise findet sich ein solches am Fixsternhimmel realisiert in dem Sternsystem ζ Cancri (Σ 1196). Optisch dreifach, besteht dasselbe nach den Untersuchungen des Herrn Geheimrat

Professor v. Seeliger[1]) aus vier Komponenten in der angegebenen Gruppierung, die sich nahezu in einer Ebene bewegen.

Die folgende Untersuchung, die auf Anregung von Herrn Geheimrat v. Seeliger entstanden ist, hat die analytische Entwickelung der Theorie eines solchen Systems zum Gegenstand.

Es sei mir an dieser Stelle gestattet, Herrn Geheimrat v. Seeliger meinen aufrichtigen Dank auszusprechen für die reiche Anregung aus seinen Vorlesungen und gesprächsweisen Mitteilungen, sowie für das jederzeitige gütige Entgegenkommen bei der Bearbeitung des vorliegenden Problems.

---

[1]) Untersuchungen über die Bewegungsverhältnisse in dem dreifachen Sternsystem ζ Cancri. Denkschriften der math.-naturw. Klasse der Akad. d. Wiss. Wien 1881. Fortgesetzte Untersuchungen über das mehrfache Sternsystem ζ Cancri. Abhandlungen der II. Klasse d. Akad. d. Wiss. München 1888.

I. Die Differentialgleichungen für die Bewegung der vier Massenpunkte; Aufstellung und Entwickelung der Störungsfunktion.

1. Vorausgesetzt wird, daß die Masse jedes der vier Körper in seinem Schwerpunkt vereinigt gedacht werden darf, so daß man also die Bewegung von vier Massenpunkten zu untersuchen hat, die sich nach dem Newtonschen Gesetz gegenseitig anziehen.

Die vier Punkte seien A, B, C, D mit den resp. Massen $m_1\, m_2\, m_3\, m_4$, und ihre Koordinaten, bezogen auf ein im Sinne der Mechanik festes Koordinatensystem im Raum seien

$$\xi_i,\ \eta_i,\ \zeta_i \qquad (i = 1, 2, 3, 4)$$

Die gegenseitige Entfernung je zweier der Punkte sei

$$\Delta_{i,k} = \sqrt{(\xi_i - \xi_k)^2 + (\eta_i - \eta_k)^2 + (\zeta_i - \zeta_k)^2}$$

Bezeichnet man noch die Konstante der Gravitation mit k^2, so lauten die Grundgleichungen für die Bewegung der vier Punkte:

$$(1)\qquad \begin{cases} m_i \cdot \dfrac{d^2\xi_i}{dt^2} = \dfrac{\partial \Omega}{\partial \xi_i} \\ m_i \cdot \dfrac{d^2\eta_i}{dt^2} = \dfrac{\partial \Omega}{\partial \eta_i} \qquad (i = 1, 2, 3, 4) \\ m_i \cdot \dfrac{d^2\zeta_i}{dt^2} = \dfrac{\partial \Omega}{\partial \zeta_i} \\ \Omega = k^2 \left[\dfrac{m_1 m_2}{\Delta_{12}} + \dfrac{m_3 m_4}{\Delta_{34}} + \dfrac{m_1 m_3}{\Delta_{13}} + \dfrac{m_1 m_4}{\Delta_{14}} + \dfrac{m_2 m_3}{\Delta_{23}} + \dfrac{m_2 m_4}{\Delta_{24}} \right] \end{cases}$$

2. Die drei Schwerpunktsintegrale, welche die Gleichungen (1) besitzen, gestatten eine Verminderung der Variabeln um drei. Es sei S der Schwerpunkt von A und B, S' derjenige von C und D. Führt man nun entsprechend

dem Charakter des Problems als neue Veränderliche die relativen Koordinaten von A gegen S, C gegen S' und von S' gegen S ein, so werden die Differentialgleichungen dieser Größen abhängig von einer Störungsfunktion, die sich in eine nach Potenzen der Größen $\frac{A\,S}{S'\,S}$ und $\frac{C\,S'}{S'\,S}$ fortschreitende Reihe entwickeln läßt. Vernachlässigt man in erster Näherung die mit diesen Verhältnissen multiplizierten Glieder, so gehen die Gleichungen über in die der Zweikörperbewegung.

Die absoluten Koordinaten von S und S' seien

$$\xi,\ \eta,\ \zeta \quad ; \quad \xi'\ \eta'\ \zeta'$$

und es werde gesetzt:

$$(2)\quad \begin{cases} x_1 = \xi_1 - \xi & x_2 = \xi_3 - \xi' & x_0 = \xi' - \xi \\ y_1 = \eta_1 - \eta & y_2 = \eta_3 - \eta' & y_0 = \eta' - \eta \\ z_1 = \zeta_1 - \zeta & z_2 = \zeta_3 - \zeta' & z_0 = \zeta' - \zeta \\ r_1 = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \quad ; & r_2 = \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2} \quad ; & r_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2} \end{cases}$$

Wegen der Schwerpunktseigenschaft von S für A und B und von S' für C und D erhält man für die Koordinaten von B gegen A und D gegen C die Ausdrücke:

$$(3)\quad \begin{cases} m_2(\xi_2 - \xi_1) = -(m_1 + m_2)\,x_1 & m_4(\xi_4 - \xi_3) = -(m_3 + m_4)\,x_2 \\ m_2(\eta_2 - \eta_1) = -(m_1 + m_2)\,y_1 & m_4(\eta_4 - \eta_3) = -(m_3 + m_4)\,y_2 \\ m_2(\zeta_2 - \zeta_1) = -(m_1 + m_2)\,z_1 & m_4(\zeta_4 - \zeta_3) = -(m_3 + m_4)\,z_2 \\ m_2 \Delta_{12} = (m_1 + m_2)\,r_1 \quad ; & m_4 \Delta_{34} = (m_3 + m_4)\,r_2 \end{cases}$$

Aus (2) und (3) erhält man für die absoluten Koordinaten die Gleichungen:

$$(4)\quad \begin{cases} \xi_1 = \xi + x_1 & \eta_1 = \eta + y_1 & \zeta_1 = \zeta + z_1 \\ \xi_2 = \xi - \frac{m_1}{m_2}\,x_1 & \eta_2 = \eta - \frac{m_1}{m_2}\,y_1 & \zeta_2 = \zeta - \frac{m_1}{m_2}\,z_1 \\ \xi_3 = \xi + x_0 + x_2 & \eta_3 = \eta + y_0 + y_2 & \zeta_3 = \zeta + z_0 + z_2 \\ \xi_4 = \xi + x_0 - \frac{m_3}{m_4}\,x_2 \quad ; & \eta_4 = \eta + y_0 - \frac{m_3}{m_4}\,y_2 \quad ; & \zeta_4 = \zeta + z_0 - \frac{m_3}{m_4}\,z_2 \end{cases}$$

Die Ausdrücke für $\xi,\ \eta,\ \zeta$ erhält man aus den Schwerpunktsintegralen; aber da die Kräftefunktion Ω nur von den Differenzen der Koordinaten abhängig ist, bedarf man der Größen $\xi,\ \eta,\ \zeta$ zur Untersuchung der relativen Bewegungen in dem System nicht.

Nach den Gleichungen (4) bestehen die folgenden Relationen:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial x_0} = \frac{\partial \Omega}{\partial \xi_3} + \frac{\partial \Omega}{\partial \xi_4}$$

$$\frac{\partial \Omega}{\partial x_1} = \frac{\partial \Omega}{\partial \xi_1} - \frac{m_1}{m_2} \cdot \frac{\partial \Omega}{\partial \xi_2}$$

$$\frac{\partial \Omega}{\partial x_2} = \frac{\partial \Omega}{\partial \xi_3} - \frac{m_3}{m_4} \cdot \frac{\partial \Omega}{\partial \xi_4}$$

in welchen auf der linken Seite Ω als Funktion der relativen, auf der rechten als Funktion der absoluten Koordinaten gedacht ist.

Für die absolute Bewegung von S und S' erhält man aus (1) die Gleichungen:

$$(m_1 + m_2) \frac{d^2 \xi}{dt^2} = \frac{\partial \Omega}{\partial \xi_1} + \frac{\partial \Omega}{\partial \xi_2} = -\left[\frac{\partial \Omega}{\partial \xi_3} + \frac{\partial \Omega}{\partial \xi_4}\right] = -\frac{\partial \Omega}{\partial x_0}$$

$$(m_3 + m_4) \frac{d^2 \xi'}{dt^2} = \frac{\partial \Omega}{\partial \xi_3} + \frac{\partial \Omega}{\partial \xi_4} = \frac{\partial \Omega}{\partial x_0}$$

und daraus

$$\frac{d^2 x_0}{dt^2} = \frac{m_1 + m_2 + m_3 + m_4}{(m_1 + m_2)(m_3 + m_4)} \cdot \frac{\partial \Omega}{\partial x_0}$$

Ferner folgt den Gleichungen (3) zufolge:

$$\frac{m_1 + m_2}{m_2} \cdot \frac{d^2 x_1}{dt^2} = \frac{1}{m_1}\left[\frac{\partial \Omega}{\partial \xi_1} - \frac{m_1}{m_2}\frac{\partial \Omega}{\partial \xi_2}\right] = \frac{1}{m_1} \cdot \frac{\partial \Omega}{\partial x_1}$$

$$\frac{m_3 + m_4}{m_4} \cdot \frac{d^2 x_2}{dt^2} = \frac{1}{m_3}\left[\frac{\partial \Omega}{\partial \xi_3} - \frac{m_3}{m_4}\frac{\partial \Omega}{\partial \xi_4}\right] = \frac{1}{m_3} \cdot \frac{\partial \Omega}{\partial x_2}$$

Das Gleichungssystem (1) geht also durch die Transformation (2) über in das folgende:

$$(5) \quad \begin{cases} \dfrac{d^2 x_0}{dt^2} = \dfrac{m_1 + m_2 + m_3 + m_4}{(m_1 + m_2)(m_3 + m_4)} \cdot \dfrac{\partial \Omega}{\partial x_0} \\ \dfrac{d^2 x_1}{dt^2} = \dfrac{1}{m_1 + m_2} \dfrac{m_2}{m_1} \cdot \dfrac{\partial \Omega}{\partial x_1} \\ \dfrac{d^2 x_2}{dt^2} = \dfrac{1}{m_3 + m_4} \dfrac{m_4}{m_3} \cdot \dfrac{\partial \Omega}{\partial x_2} \\ \Omega = k^2 \left[\dfrac{m_1 m_2}{\Delta_{12}} + \dfrac{m_3 m_4}{\Delta_{34}} + \dfrac{m_1 m_3}{\Delta_{13}} + \dfrac{m_1 m_4}{\Delta_{14}} + \dfrac{m_2 m_3}{\Delta_{23}} + \dfrac{m_2 m_4}{\Delta_{24}}\right] \end{cases}$$

Indem man die Buchstaben x durch y resp. z ersetzt, erhält man die entsprechenden Gleichungen für die andern Koordinaten.

3. Um nun die Gleichungen (5) in der Form von Störungsgleichungen zu schreiben, bemerken wir, daß die beiden ersten Glieder in Ω

$$k^2 \frac{m_1 m_2}{\Delta_{12}} = k^2 \frac{m_1 m_2^2}{m_1 + m_2} \frac{1}{r_1}$$

und

$$k^2 \frac{m_3 m_4}{\Delta_{34}} = k^2 \frac{m_3 m_4^2}{m_3 + m_4} \frac{1}{r_2}$$

die ungestörte Zentralbewegung von A um S und C um S' ergeben. Die vier übrigen Glieder lassen sich in Reihen entwickeln, die nach Potenzen von $\frac{r_1}{r_0}$ und $\frac{r_2}{r_0}$ fortschreiten und deren Koeffizienten sich aus Kugelfunktionen linear zusammensetzen. Das Glied 0ter Ordnung in Bezug auf diese Verhältnisgrößen ruft die Zentralbewegung von S' um S hervor und wird offenbar durch den Ausdruck dargestellt:

$$k^2 \frac{m_1 m_3 + m_1 m_4 + m_2 m_3 + m_2 m_4}{r_0} = k^2 \frac{(m_1 + m_2)(m_3 + m_4)}{r_0}$$

Unter Einführung der Störungsfunktion

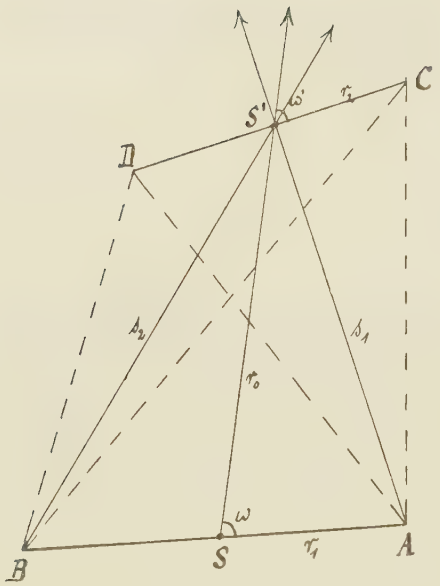
$$R = k^2 \left[\frac{m_1 m_3}{\Delta_{13}} + \frac{m_1 m_4}{\Delta_{14}} + \frac{m_2 m_3}{\Delta_{23}} + \frac{m_2 m_4}{\Delta_{24}} - \frac{(m_1 + m_2)(m_3 + m_4)}{r_0} \right]$$

lassen sich daher die Gleichungen (5) auch in der Form schreiben:

$$(6) \quad \begin{cases} \dfrac{d^2 x_0}{dt^2} + k^2 (m_1 + m_2 + m_3 + m_4) \dfrac{x_0}{r_0^3} = \dfrac{m_1 + m_2 + m_3 + m_4}{(m_1 + m_2)(m_3 + m_4)} \dfrac{\partial R}{\partial x_0} \\ \dfrac{d^2 x_1}{dt^2} + k^2 \dfrac{m_2^3}{(m_1 + m_2)^2} \dfrac{x_1}{r_1^3} = \dfrac{1}{m_1 + m_2} \dfrac{m_2}{m_1} \dfrac{\partial R}{\partial x_1} \\ \dfrac{d^2 x_2}{dt^2} + k^2 \dfrac{m_4^3}{(m_1 + m_2)^2} \dfrac{x_2}{r_2^3} = \dfrac{1}{m_3 + m_4} \dfrac{m_4}{m_3} \dfrac{\partial R}{\partial x_2} \\ R = k^2 \left[\dfrac{m_1 m_3}{\Delta_{13}} + \dfrac{m_1 m_4}{\Delta_{14}} + \dfrac{m_2 m_3}{\Delta_{23}} + \dfrac{m_2 m_4}{\Delta_{24}} - \dfrac{(m_1 + m_2)(m_3 + m_4)}{r_0} \right] \end{cases}$$

mit sechs analogen Gleichungen für die anderen Koordinaten.

4. Im folgenden soll die Störungsfunktion für denjenigen speziellen Fall entwickelt werden, der den Anwendungen zu Grunde gelegt ist: daß sich die vier Punkte zur Anfangsepoche in einer Ebene befinden und sich gleichfalls in dieser bewegen, so daß auch die weitere Bewegung in dieser Ebene, die zur Bezugsebene gewählt wird, erfolgt.



Es sei:

$$A\,S' = s_1 \qquad B\,S' = s_2$$
$$\sphericalangle\,(r_1\,r_0) = \omega, \qquad \sphericalangle\,(r_2\,r_0) = \omega'$$

Aus der Figur sind die folgenden Relationen ersichtlich:

$$B\,S = \frac{m_1}{m_2}\,r_1 \quad ; \quad D\,S' = \frac{m_3}{m_4}\,r_2$$

$$(7)\quad \begin{cases} s_1^2 = r_0^2 + r_1^2 - 2\,r_1\,r_0\cos\omega \\ s_1\cos(s_1\,r_2) = r_0\cos\omega' - r_1\cos(\omega - \omega') \\ s_2^2 = r_0^2 + \left(\frac{m_1}{m_2}r_1\right)^2 + 2\frac{m_1}{m_2}r_1\,r_0\cos\omega \\ s_2\cos(s_2\,r_2) = r_0\cos\omega + \frac{m_1}{m_2}r_1\cos(\omega - \omega') \end{cases}$$

Durch Anwendung des Kosinussatzes auf die Dreiecke $A\,S'\,C$, $A\,S'\,D$ und $B\,S'\,C$ und $B\,S'\,D$ erhält man für Δ_{13}, Δ_{14}, Δ_{23}, Δ_{24} die Ausdrücke:

$$\Delta_{13}^2 = s_1^2 + r_2^2 + 2\,r_2\,s_1\cos(s_1\,r_2)$$
$$\Delta_{14}^2 = s_1^2 + \left(\frac{m_3}{m_4}r_2\right)^2 - 2\frac{m_3}{m_4}r_2\,s_1\cos(s_1\,r_2)$$
$$\Delta_{23}^2 = s_2^2 + r_2^2 + 2\,r_2\,s_2\cos(s_2\,r_2)$$
$$\Delta_{24}^2 = s_2^2 + \left(\frac{m_3}{m_4}r_2\right)^2 - 2\frac{m_3}{m_4}r_2\,s_2\cos(s_2\,r_2)$$

und daraus unter Benutzung der Gleichungen (7):

$$\Delta_{13}^2 = \left[r_0 - r_1\cos\omega + r_2\cos\omega'\right]^2 + \left[r_1\sin\omega - r_2\sin\omega'\right]^2$$
$$\Delta_{14}^2 = \left[r_0 - r_1\cos\omega - \frac{m_3}{m_4}r_2\cos\omega'\right]^2 + \left[r_1\sin\omega + \frac{m_3}{m_4}r_2\sin\omega'\right]^2$$
$$\Delta_{23}^2 = \left[r_0 + \frac{m_1}{m_2}r_1\cos\omega + r_2\cos\omega'\right]^2 + \left[\frac{m_1}{m_2}r_1\sin\omega + r_2\sin\omega'\right]^2$$
$$\Delta_{24}^2 = \left[r_0 + \frac{m_1}{m_2}r_1\cos\omega - \frac{m_3}{m_4}r_2\cos\omega'\right]^2 + \left[\frac{m_1}{m_2}r_1\sin\omega - \frac{m_3}{m_4}r_2\sin\omega'\right]^2$$

Es seien die Positionswinkel von S', A und C gemessen von der positiven Abszissenachse aus $v_0\,v_1\,v_2$, so daß

$$\omega = v_0 - v_1, \qquad \omega' = v_0 - v_2$$

Führt man nun statt der Polarkoordinaten $(r_1\, v_1)$, $(r_2\, v_2)$ die folgenden ein:

$$(8)\qquad \begin{cases} r_1 e^{-\sqrt{-1}\, v_1} - r_2 e^{-\sqrt{-1}\, v_2} = z_1 e^{-\sqrt{-1}\, \zeta_1} \\ r_1 e^{-\sqrt{-1}\, v_1} + \frac{m_3}{m_4} r_2 e^{-\sqrt{-1}\, v_2} = z_2 e^{-\sqrt{-1}\, \zeta_2} \\ -\frac{m_1}{m_2} r_1 e^{-\sqrt{-1}\, v_1} - r_2 e^{-\sqrt{-1}\, v_2} = z_3 e^{-\sqrt{-1}\, \zeta_3} \\ -\frac{m_1}{m_2} r_1 e^{-\sqrt{-1}\, v_1} + \frac{m_3}{m_4} r_2 e^{-\sqrt{-1}\, v_2} = z_4 e^{-\sqrt{-1}\, \zeta_4} \end{cases}$$

so folgen für die gegenseitigen Entfernungen der Punkte die Ausdrücke:

$$(9)\qquad \begin{cases} \Delta_{13}^2 = r_0^2 \left[1 - 2\frac{z_1}{r_0}\cos(v_0 - \zeta_1) + \left(\frac{z_1}{r_0}\right)^2\right] \\ \Delta_{14}^2 = r_0^2 \left[1 - 2\frac{z_2}{r_0}\cos(v_0 - \zeta_2) + \left(\frac{z_2}{r_0}\right)^2\right] \\ \Delta_{23}^2 = r_0^2 \left[1 - 2\frac{z_3}{r_0}\cos(v_0 - \zeta_3) + \left(\frac{z_3}{r_0}\right)^2\right] \\ \Delta_{24}^2 = r_0^2 \left[1 - 2\frac{z_4}{r_0}\cos(v_0 - \zeta_4) + \left(\frac{z_4}{r_0}\right)^2\right] \end{cases}$$

Daraus ergibt sich unmittelbar die Entwickelung der reziproken Werte der Entfernungen und damit der Störungsfunktion nach Kugelfunktionen mit einem Argument; die Argumente sind $v_0 - \zeta_i \quad (i = 1, 2, 3, 4)$.

Bei der Ausdehnung der Entwickelungen auf den Raum lassen sich ähnlich wie hier an Stelle der Polarkoordinaten andere einführen, welche gestatten, die Störungsfunktion in eine Kugelfunktionsreihe zu entwickeln; doch werden dann die Kugelfunktionen abhängig von zwei Argumenten.

Die Entwickelung von R beginnt erst mit den zweiten Potenzen der Größen $\frac{z_i}{r_0}$: das Glied 0ter Ordnung fällt fort nach dem, was in Nr. 3 darüber gesagt ist; das Glied 1ter Ordnung lautet

$$\frac{k^2}{r_0^2}\left[m_1 m_3 z_1 \cos(v_0 - \zeta_1) + m_1 m_4 z_2 \cos(v_0 - \zeta_2) + m_2 m_3 z_3 \cos(v_0 - \zeta_3) + m_2 m_4 z_4 \cos(v_0 - \zeta_4)\right]$$

und verschwindet nach (8).

Somit erhält man für R die Entwickelung:

$$(10)\quad \left\{ R = k^2 \cdot \sum_{n=2}^{\infty} \Big[m_1 m_3 \frac{z_1^n}{r_0^{n+1}} P_n(v_0 - \zeta_1) + m_1 m_4 \frac{z_2^n}{r_0^{n+1}} P_n(v_0 - \zeta_2) + m_2 m_3 \frac{z_3^n}{r_0^{n+1}} P_n(v_0 - \zeta_3) + m_2 m_4 \frac{z_4^n}{r_0^{n+1}} P_n(v_0 - \zeta_3) \Big] \right.$$

worin $P_n(v_0 - \zeta_i)$ die Kugelfunktion n^{ten} Grades mit dem Argument $v_0 - \zeta_i$ bedeutet. Es ist:

$$(10')\quad \left\{ \begin{aligned} P_n(v_0 - \zeta_i) &= C_{n,0} \cos n(v_0 - \zeta_i) + C_{n-2,2} \cos[(n-2)(v_0 - \zeta_i)] + \cdots\cdots \\ &\quad + \begin{cases} C_{1,n-1} \cos(v_0 - \zeta_i) & \text{wenn } n \text{ ungerad} \\ \frac{1}{2} C_{0,n} & \text{„ } n \text{ gerad} \end{cases} \\ C_{n-l,l} &= 2 \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots\cdots (l-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots\cdots l} \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots\cdots (2n-l-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots\cdots (2n-l)} \\ C_{n,0} &= 2 \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots\cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots\cdots 2n} \end{aligned} \right.$$

Die Reihe (10) konvergiert, solange

$$\left| \frac{z_i}{r_0} \right| < 1 \qquad (i = 1, 2, 3, 4)$$

II. Integration der Differentialgleichungen durch sukzessive Näherungen und unendliche Reihen.

5. Führt man in den Gleichungen (6) des vorigen Abschnittes die Geschwindigkeiten der Massenpunkte nach den Koordinatenrichtungen als neue Veränderliche ein, so bilden diese Gleichungen ein Differentialsystem der folgenden allgemeineren Form:

$$\frac{d x_i}{d t} = \sum_{n=0}^{\infty} f_{i,n}[t, x_1 \ldots . x_m] \qquad (i = 1, 2 \ldots . m) \tag{1}$$

mit der reellen unabhängigen Veränderlichen t und den abhängigen Veränderlichen $x_1 \ldots . x_m$.

Die Funktionen $f_{i,0}[t, x_1 \ldots . x_m]$ vertreten die Kräfte, die die ungestörte Zentralbewegung der Punkte erzeugen; die unendlichen Reihen

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_{i,n}[t, x_1 \ldots . x_m] \qquad (i = 1, 2 \ldots . m)$$

bedeuten die Reihenentwickelungen für die störenden Kräfte, wie sie sich aus der Entwickelung der Störungsfunktion ergeben. Wählt man die Anfangsbedingungen des Systems passend, so sind diese Reihen innerhalb eines gewissen endlichen Zeitintervalles unbedingt konvergent.

Die Voraussetzung einer Potentialfunktion für die Kräfte brauchen die Funktionen $f_{i,n}[t, x_1 \ldots . x_m]$ nicht zu erfüllen; außerdem können sie explizit von der Zeit und den Geschwindigkeiten abhängen.

Die Funktionen $f_{i,n}[t, x_1 \ldots . x_m]$ müssen jedoch diejenigen Eigenschaften besitzen, die für das System der vier Massenpunkte charakteristisch sind und die Entwickelung einer Theorie desselben ermöglichen. Diese Eigenschaften erhält man am einfachsten aus den folgenden Majoranten[1]) für die Reihenentwickelungen der Kräfte.

6. Setzt man

$$Q_n = 2\left[C_{n,0} + C_{n-2,2} + \cdots\cdots + \begin{cases} C_{1,n-1} & n \text{ ungerad} \\ \frac{1}{2} C_{0,n} & n \text{ gerad} \end{cases}\right]$$

so ist die folgende Reihe Majorante der Störungsfunktion:

$$S = k^2 \cdot \sum_{n=2}^{\infty} \frac{Q_n}{r_0^{n+1}} \left[m_1 m_3 z_1^n + m_1 m_4 z_2^n + m_2 m_3 z_3^n + m_2 m_4 z_4^n\right]$$

[1]) Man nennt eine Potenzreihe majorant in Bezug auf eine andere ebenso konstruierte, wenn ihre Koeffizienten reell und positiv sind und dem absoluten Betrage nach größer als die entsprechenden Koeffizienten der zweiten Reihe. Die Entwickelungen der Kräfte sind Potenzreihen nach den Größen $\frac{r_1}{r_0}$ und $\frac{r_2}{r_0}$

Beachtet man die Gleichungen (8) in Nr. 4, so erhält man für die Kräfte die folgenden majoranten Reihen:

$$S_0' = k^2 (m_1 + m_2 + m_3 + m_4) \frac{1}{r_0^2} + k^2 \frac{m_1 + m_2 + m_3 + m_4}{(m_1 + m_2)(m_3 + m_4)} \cdot \sum_{n=2}^{\infty} (n+1) \frac{Q_n}{r_0^{n+2}} [m_1 m_3 z_1^n + m_1 m_4 z_2^n + m_2 m_3 z_3^n + m_2 m_4 z_4^n]$$

$$S_1' = k^2 \frac{m_2^3}{(m_1 + m_2)^2} \frac{1}{r_1^2} + k^2 \frac{m_2}{m_1 + m_2} \cdot \sum_{n=2}^{\infty} n \frac{Q_n}{r_0^{n+1}} [m_3 z_1^{n-1} + m_4 z_2^{n-1} + m_3 z_3^{n-1} + m_4 z_4^{n-1}]$$

$$S_2' = k^2 \frac{m_4^3}{(m_1 + m_2)^2} \frac{1}{r_2^2} + k^2 \frac{m_4}{m_3 + m_4} \cdot \sum_{n=2}^{\infty} n \frac{Q_n}{r_0^{n+1}} [m_1 z_1^{n-1} + m_1 z_2^{n-1} + m_2 z_3^{n-1} + m_2 z_4^{n-1}]$$

Es seien a_0, a_1, a_2 die Halbachsen der Ellipsen, in denen sich die Punkte unter Vernachlässigung der störenden Kräfte bewegen, und n_0, n_1, n_2 seien die zugehörigen mittleren Winkelgeschwindigkeiten. Zwischen diesen Größen und den Massen bestehen die Beziehungen:

(a)
$$\begin{cases} k^2 (m_1 + m_2 + m_3 + m_4) = n_0^2 a_0^3 \\ k^2 \dfrac{m_2^3}{(m_1 + m_2)^2} = n_1^2 a_1^3 \\ k^2 \dfrac{m_4^3}{(m_3 + m_4)^2} = n_2^2 a_2^3 \end{cases}$$

Bezeichnet man den größten Wert des Ausdrucks

$$\sqrt[n]{\frac{(n+1) Q_n}{\sqrt{2}}} \qquad (n = 1, 2 \ldots . \infty)$$

mit α[1]), und setzt zur Abkürzung

---

[1]) Es ist nach der Formel (10'), wenn man in derselben statt l $2p$ setzt:

I. $$Q_n = 2 \cdot \sum_{p=0}^{\frac{n-1}{2}} \frac{1 \cdot 3 \ldots . (2p-1)}{2 \cdot 4 \ldots . 2p} \cdot \frac{1 \cdot 3 \ldots . (2n-2p-1)}{2 \cdot 4 \ldots . (2n-2p)}$$ wenn n ungerad

II. $$Q_n < 2 \cdot \sum_{p=0}^{\frac{n}{2}} \frac{1 \cdot 3 \ldots . (2p-1)}{2 \cdot 4 \ldots . 2p} \cdot \frac{1 \cdot 3 \ldots . (2n-2p-1)}{2 \cdot 4 \ldots . (2n-2p)}$$ wenn n gerad

Nach der allgemeinen Ungleichung

$$\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots . (2m-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots . 2m} < \frac{1}{\sqrt{1+m}}$$

folgt

$$\sqrt{2} \cdot \frac{1}{(m_1 + m_2)(m_3 + m_4)} = \beta_0$$

$$\sqrt{2} \cdot \frac{m_1 + m_2}{m_2^2} = \beta_1$$

$$\sqrt{2} \cdot \frac{m_3 + m_4}{m_4^2} = \beta_2$$

so sind den Relationen (a) zufolge auch die folgenden Reihen Majoranten der Kräfte:

$$\text{(b)} \quad \begin{cases} S_0 = n_0^2 \frac{a_0^3}{r_0^2} + \beta_0 n_0^2 \frac{a_0^3}{r_0^2} \cdot \sum_{n=2}^{\infty} \alpha^n \frac{m_1 m_3 z_1^n + m_1 m_4 z_2^n + m_2 m_3 z_3^n + m_2 m_4 z_4^n}{r_0^n} \\ S_1 = n_1^2 \frac{a_1^3}{r_1^2} + \beta_1 n_1^2 \frac{a_1^3}{r_0^2} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \alpha^n \frac{m_3 z_1^n + m_4 z_2^n + m_3 z_1^n + m_4 z_4^n}{r_0^n} \\ S_2 = n_2^2 \frac{a_2^3}{r_2^2} + \beta_2 n_2^2 \frac{a_2^3}{r_0^2} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \alpha^n \frac{m_1 z_1^n + m_1 z_2^n + m_2 z_3^n + m_2 z_4^n}{r_0^n} \end{cases}$$

und zwar ist S_0 majorant in Bezug auf die Kräfte, die die Bewegung von S' um S bestimmen, S_1 und S_2 entsprechend für die Bewegung von A um S und C um S'.

Wir machen nun über den Anfangszustand des Systems der vier Punkte diejenigen Voraussetzungen, die für den speziellen Fall dieser Untersuchung charakteristisch sind:

$$\text{I.} \quad Q_n < 2 \cdot \sum_{p=0}^{\frac{n-1}{2}} \frac{1}{\sqrt{(1+p)(1+n-p)}}$$

$$\text{II.} \quad Q_n < 2 \cdot \sum_{p=0}^{\frac{n}{2}} \frac{1}{\sqrt{(1+p)(1+n-p)}}$$

oder da p nur positive Werte annimmt:

$$\text{I.} \quad Qn < \frac{2}{\sqrt{\frac{3}{2} + \frac{n}{2}}} \times \text{Anzahl der Glieder} < \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{n+3}} \frac{n+1}{2}$$

$$\text{II.} \quad Qn < \frac{2}{\sqrt{1 + \frac{n}{2}}} \times \text{Anzahl der Glieder} < \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{n+2}} \left(\frac{n}{2} + 1\right)$$

α kann man also gleich dem größten Wert des Ausdrucks setzen

$$\sqrt[n]{(n+1)\sqrt{n+2}} \qquad (n = 1, 2 \ldots . \infty)$$

das ist

$$\alpha = 2 \cdot \sqrt{3}$$

Die Massen bleiben zunächst beliebig, so daß die Faktoren $\beta_0, \beta_1, \beta_2$ irgendwelche Größen 0ter Ordnung sind. Dagegen setzen wir die Verhältnisse $\frac{r_1}{r_0}$ und $\frac{r_2}{r_0}$ für den Anfang der Bewegung als kleine Größen voraus, sowie, daß diese Gruppierung der Punkte innerhalb eines endlichen Zeitintervalles T erhalten bleibt. In diesem Intervall sei

$$\left| \alpha \frac{\varepsilon_i}{r_0} \right| < \mu \qquad (i = 1, 2, 3, 4)$$

und μ eine kleine Größe erster Ordnung.

Wählt man ferner T hinreichend klein, so läßt sich die ungestörte Bewegung immer so bestimmen, daß sich die ungestörten Werte von r_0, r_1, r_2 von den wahren nur um so kleine Größen unterscheiden als man will; es sind dann auch die Quotienten $\frac{a_1}{a_0}$ und $\frac{a_2}{a_0}$ Größen von der Ordnung μ. Übrigens ist es durchaus nicht notwendig, daß der ungestörten und der gestörten Bewegung für die Anfangsepoche gleiche Werte der Koordinaten und Geschwindigkeiten entsprechen; vielmehr können sie sich um Beträge von der Ordnung der Störungen unterscheiden.

Die Maßeinheiten wählen wir so, daß die Größen r_0 und a_0 von der 0ten Ordnung sind; r_1, a_1 und r_2, a_2 sind dann Größen erster Ordnung in Bezug auf μ. Die Größenordnung der einzelnen Glieder der Reihen (b) ist hiernach klar und man kann nun die notwendigen Voraussetzungen für die Funktionen $f_{i,n}[t, x_1 \ldots . x_m]$ aufstellen. Hinsichtlich der abgeleiteten Funktionen genügt es zu bemerken, daß Differentiieren der den Funktionen $f_{i,n}$ entsprechenden Glieder in der Entwickelung der Kräfte nach r_1 und r_2 deren Größenordnung um eine Einheit vermindert.

Unendlich kleine Werte von μ und den Wert $\mu = 0$ schließen wir von der Untersuchung aus. Für diese Werte geht das Problem in das Zweikörperproblem über: Entweder die Massen m_1 und m_2 vereinigen sich zu einer Masse im Punkt S und ebenso m_3 und m_4 in S' oder die beiden Paare A, B und C, D rücken unendlich weit auseinander, so daß sie sich nicht mehr gegenseitig stören.

Bevor wir nach diesen einleitenden Bemerkungen die zur Untersuchung der Gleichungen (1) notwendigen Voraussetzungen formulieren, mögen noch diejenigen Sätze aus der Theorie der linearen Differentialgleichungen zusammengestellt werden, die im folgenden wiederholt angewendet worden sind.

7. Gegeben sei das lineare Differentialsystem erster Ordnung

$$\text{(a)} \qquad \frac{dy_i}{dt} = A_{i1}(t) \cdot y_1 + \cdots + A_{in}(t) \cdot y_n + A_i(t) \qquad (i = 1, 2 \ldots n)$$

mit der unabhängigen reellen Veränderlichen t und den abhängigen Veränderlichen $y_1 \ldots y_n$.

Die Funktionen $A_{ik}(t)$ $(i, k = 1, 2 \ldots n)$ und $A_i(t)$ $(i = 1, 2 \ldots n)$ seien stetig in dem Bereich $|t - t_0| \leq T$. Das System (a) besitzt dann eine für $|t - t_0| \leq T$ reelle stetige Lösung, die durch die Anfangswerte

$$\text{(b)} \qquad y_i = b_i \quad \text{für} \quad t = t_0 \qquad (i = 1, 2 \ldots n)$$

eindeutig bestimmt ist.

Wir betrachten zunächst den homogenen Teil der Gleichungen (a), d. h. unter Vernachlässigung der sekundären Glieder $A_1(t) \ldots A_n(t)$. Seien

$$\begin{matrix} y_{11} \cdots y_{1n} \\ \cdots\cdots \\ \cdots\cdots \\ y_{n1} \cdots y_{nn} \end{matrix}$$

n^2 partikuläre Lösungen der Gleichungen dergestalt, daß ihre Determinante nicht identisch verschwindet — also insbesondere nicht für $t = t_0$ —, so bilden sie nach der Ausdrucksweise von Fuchs ein Fundamentalsystem von Lösungen.

Kennt man ein solches Fundamentalsystem, so lauten die vollständigen Lösungen:

$$y_i = c_1 y_{i1} + \cdots + c_n y_{in} \qquad i = 1, 2 \ldots n$$

$c_1 \ldots c_n$ sind die willkürlichen Integrationskonstanten, die mit den Anfangswerten (b) für $y_1 \ldots y_n$ linear zusammenhängen.

Um nun in den Gleichungen (a) die sekundären Glieder mitzuberücksichtigen, löst man zunächst die Gleichungen ohne Rücksicht auf dieselben auf und variiert dann die Konstanten $c_1 \ldots c_n$ entsprechend. Die vollständige Lösung des Systems (a) lautet demnach:

$$\text{(c)} \qquad y_i = (c_1 + \gamma_1) y_{i1} + \cdots + (c_n + \gamma_n) y_{in} \qquad (i = 1, 2 \ldots n)$$

worin die Größen $\gamma_1 \ldots \gamma_n$ stetige Funktionen von t sind, die mittels Quadraturen gefunden werden. Man erhält zunächst zu ihrer Bestimmung die Gleichungen:

$$\text{(d)} \qquad \begin{cases} y_{11}\dfrac{d\gamma_1}{dt} + \cdots + y_{1n}\dfrac{d\gamma_n}{dt} = A_1(t) \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ y_{n1}\dfrac{d\gamma_1}{dt} + \cdots + y_{nn}\dfrac{d\gamma_n}{dt} = A_n(t) \end{cases}$$

deren Auflösung nach $\frac{d\gamma_1}{dt} \cdots \frac{d\gamma_n}{dt}$ möglich ist, da die Determinante der Gleichungen nicht identisch verschwindet. Der von den sekundären Gliedern herrührende Teil der Lösungen (c)

$$\eta_i = \gamma_1 y_{i1} + \cdots + \gamma_n y_{in} \qquad (i = 1, 2 \ldots n)$$

ist eine partikuläre Lösung der Gleichungen (a).

Die lineare Differentialgleichung n^{ter} Ordnung

$$\text{(e)} \qquad \frac{d^n y}{dt^n} + B_1(t) \cdot \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \cdots + B_n(t) \cdot y = B(t)$$

in welcher $B(t)$, $B_1(t) \ldots . B_n(t)$ für $|t - t_0| < T$ stetige Funktionen der reellen unabhängigen Veränderlichen t seien, läßt sich in einfacher Weise auf ein System von n Differentialgleichungen erster Ordnung reduzieren, wenn man die folgenden neuen Veränderlichen einführt:

$$\frac{d^p y}{dt^p} = y_{p+1} \qquad (p = 0, 1, 2 \ldots . n - 1)$$

Die Gleichung (e) wird dann durch das folgende Gleichungssystem ersetzt:

$$\text{(f)} \qquad \begin{cases} \dfrac{dy_1}{dt} = y_2 \\ \dfrac{dy_2}{dt} = y_3 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \dfrac{dy_n}{dt} = -B_1(t) \cdot y_n - B_2(t) \cdot y_{n-1} \cdots - B_n(t) \cdot y_1 - B(t) \end{cases}$$

auf welches die allgemeinen Sätze ihre Anwendung finden.

8. Zurückkehrend zu den Gleichungen (1) dieses Abschnittes betrachten wir die durch die Anfangswerte

$$\text{(2)} \qquad x_i = a_i \quad \text{für} \quad t = t_0 \quad (i = 1, 2 \ldots . m)$$

definierte Lösung des Systems.

Die Voraussetzungen über die Funktionen $f_{i,n}[t, x_1 \ldots . x_m]$ seien die folgenden:

Die Funktionen $f_{i,n}$ seien stetig für alle Werte der reellen Veränderlichen $t, x_1 \ldots . x_m$ in dem Gebiet:

$$(3) \qquad |t - t_0| \leqq T \qquad |x_i - a_i| \leqq R \qquad (i = 1, 2 \ldots . m)$$

Ferner sei innerhalb dieses Gebietes

$$(4) \qquad \begin{cases} |f_{i,n}| \leqq M_n & \begin{pmatrix} i = 1, 2 \ldots . m \\ n = 0, 1, 2 \ldots . \infty \end{pmatrix} \\ M_n = m_n \mu^n \end{cases}$$

wo m_n eine endliche positive Größe bedeutet und μ eine positive Zahl kleiner als 1; doch sollen unendlich kleine Werte von μ sowie der Wert $\mu = 0$ ausgeschlossen sein. Weiterhin seien solche positive Größen N_n vorhanden, daß

$$(5) \qquad |f_{i,n}[t, x_1' \ldots . x_m'] - f_{i,n}[t, x_1 \ldots . x_m]| \leqq N_n [|x_1' - x_1| + \cdots + |x_m' - x_m|]$$

wenn $t, x_1' \ldots . x_m'$ und $t, x_1 \ldots . x_m$ zwei beliebige Stellen des Gebietes (3) sind; und es seien die N_n mit den M_n durch die Relationen verbunden

$$(6) \qquad N_n = \frac{M_n}{\mu} \qquad (n = 0, 1, 2 \ldots . \infty)^1)$$

Daß unter den gemachten Voraussetzungen stetige Funktionen $x_1 \ldots . x_m$ von t existieren, welche den Differentialgleichungen (1) genügen und für $t = t_0$ die vorgeschriebenen Werte annehmen, und daß diese Funktionen auch die einzige Lösung des Systems (1) mit den angegebenen Eigenschaften bilden, zeigt der Beweis von Picard.[2])

Für die wirkliche Herstellung der Lösung sind jedoch die sukzessiven Näherungen, die zur Führung des Existenzbeweises derselben dienen, zu weitläufig; man muß daher hierfür andere Methoden aufsuchen.

---

[1]) Diese Voraussetzung ist gleichbedeutend mit der folgenden:

$$N_n = a_n \mu^{n-1}$$

wo a_n eine positive endliche Größe bedeutet. Durch eine geeignete Wahl von m_n läßt sich die Beziehung (6) erreichen.

[2]) Picard, Traité d'Analyse, Bd. II, 2. Aufl., S. 340 ff.
Der Beweis zeigt ferner: Wenn man die kleinere der beiden Größen

$$T, \frac{R}{M_0 + M_1 + M_2 + \cdots}$$

— die Reihe im Nenner ist unbedingt konvergent — mit τ bezeichnet, so gehören die Funktionen $x_1 \ldots . x_m$, die für $t = t_0$ die Werte $a_1 \ldots . a_m$ annehmen, für $|t - t_0| < \tau$ dem Bereich R an.

Man gelangt zum Ziel mit Hilfe der folgenden Näherungsmethode:

$$(7)\qquad \begin{cases} \dfrac{dx_i^0}{dt} = f_{i,0}[t, x_1^0 \ldots x_m^0] \\ \dfrac{dx_i^1}{dt} = f_{i,0}[t, x_1^1 \ldots x_m^1] + f_{i,1}[t, x_1^0 \ldots x_m^0] \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{dx_i^p}{dt} = f_{i,0}[t, x_1^p \ldots x_m^p] + f_{i,1}[t, x_1^{p-1} \ldots x_m^{p-1}] + \cdots + f_{i,p}[t, x_1^0 \ldots x_m^0] \\ \qquad\qquad i = 1, 2 \ldots m \end{cases}$$

indem man den Index p sukzessiv beliebig groß werden läßt. Die Lösungen der einzelnen Näherungen seien bestimmt durch die Anfangsbedingungen

$$(8)\qquad \begin{cases} x_i^p = a_i^p \\ \lim\limits_{p=\infty} a_i^p = a_i \end{cases} \quad \text{für} \quad t = t_0 \quad \begin{pmatrix} i = 1, 2 \ldots m \\ p = 0, 1 \ldots \infty \end{pmatrix}$$

Die Anfangswerte seien so vorausgesetzt, daß sie mit ihrer Umgebung dem Wertebereich R angehören, sowie, wenn A_p den absolut größten Wert der Größen $(a_1 - a_1^p) \ldots (a_m - a_m^p)$ bedeutet, daß die Größen $A_0 \ldots A_p$ mit wachsendem p stärker oder ebenso stark gegen 0 konvergieren wie μ^p.

Dementsprechend seien positive Größen $R_0 R_1 \ldots R_p$ dergestalt vorhanden, daß

$$R_p = R - A_p \qquad (p = 0, 1 \ldots \infty)$$

Es gehört dann jede Stelle $x_1 \ldots x_m$ des Gebietes

$$|x_i - a_i^p| < R_p \qquad (i = 1, 2 \ldots m)$$

auch dem Gebiet

$$|x_i - a_i| \leqq R \qquad (i = 1, 2 \ldots m)$$

an. Denn es ist

$$|x_i - a_i| \leqq |x_i - a_i^p| + |a_i - a_i^p| \leqq R$$

9. Um die Konvergenz des Näherungsverfahrens (7) zu beweisen, weisen wir zunächst nach, daß die Lösungen aller Näherungen zusammen mit der Lösung der Gleichungen (1) dem Bereich

$$|x_i - a_i| < R \qquad (i = 1, 2 \ldots m)$$

angehören für

$$|t - t_0| < \tau$$

wobei τ die kleinste der positiven Größen

$$T,\ \frac{R_0}{M_0},\ \frac{R_1}{M_0+M_1},\ \cdots\ \frac{R_p}{M_0+M_1+\cdots+M_p},\ \frac{R}{M_0+M_1+\cdots}$$

bedeutet.

Wir untersuchen die einzelnen Näherungen der Reihe nach.

In dem Bereich

$$t-t_0 < T,\quad x_i^0-a_i^0 < R_i \qquad (i=1,2\ldots m)$$

erfüllen die Funktionen $f_{i,0}[t, x_1^0 \ldots x_m^0]$ die Voraussetzungen (4) und (5). Zunächst folgt aus diesen Voraussetzungen nach dem Picardschen Beweis die Existenz stetiger Funktionen, die die Differentialgleichungen (7) für $p=0$ befriedigen und die vorgeschriebenen Werte für $t=t_0$ annehmen; das gleiche gilt auch von den folgenden Näherungen. Bezeichnet man ferner die kleinere der beiden positiven Größen

$$T,\ \frac{R_0}{M_0}$$

mit τ_0, so gehören für $|t-t_0| \leq \tau_0$ die Lösungen $x_1^0 \ldots x_m^0$ dem Gebiet $|x_i^0 - a_i^0| < R_0$ und also auch dem Gebiet $|x_i^0 - a_i| \leq R$ an.[1])

In gleicher Weise gestaltet sich der Beweis für die zweite Näherung. Hier genügen die Funktionen

$$f_{i,0}[t, x_1^1 \ldots x_m^1] + f_{i,1}[t, x_1^0 \ldots x_m^0]$$

den Voraussetzungen (4) und (5) für

$$t-t_0| \leq \tau_0 \qquad \text{und} \qquad |x_i^1 - a_i^1| \leq R_i$$

Für $|t-t_0| \leq \tau_1$, wo τ_1 die kleinere der beiden positiven Größen $\tau_0, \frac{R_1}{M_0+M_1}$ bedeutet, gehören die Lösungen $x_1^1 \ldots x_m^1$ dem Gebiet $|x_i^1 - a_i^1| \leq R_1$ und somit auch dem Gebiet $|x_i^1 - a_i| < R$ an. Schließt man in dieser Weise sukzessiv fort, so ergibt sich die Richtigkeit der obigen Behauptung. Es ist dann τ die kleinere der Größen

$$\tau_p,\ \frac{R}{M_0+M_1+\cdots}$$

Das Integrationsverfahren (7) ist nun offenbar konvergent, wenn die Größen

$$z_i^p = x_i - x_i^p \qquad (i=1,2\ldots m) \tag{9}$$

mit zunehmendem Index p ihrem absoluten Betrage nach unter jeden beliebigen Kleinheitsgrad herabgedrückt werden können.

[1]) Vgl. Anm. 2, S. 19.

Die Differentialgleichungen, welchen diese Größen genügen, lauten:

$$(10)\quad \begin{cases} \dfrac{dz_i^p}{dt} = f_{i,0}[t, x_1 \dots x_m] - f_{i,0}[t, x_1^p \dots x_m^p] \\ \quad + f_{i,1}[t, x_1 \dots x_m] - f_{i,1}[t, x_1^{p-1} \dots x_m^{p-1}] \\ \quad \dots \dots \dots \dots \dots \\ \quad + f_{i,p}[t, x_1 \dots x_m] - f_{i,p}[t, x_1^0 \dots x_m^0] + \sum_{n=p+1}^{\infty} f_{i,n}[t, x_1 \dots x_m] \\ \qquad (i = 1, 2 \dots m) \end{cases}$$

Für $|t - t_0| \leq \tau$ gehören die Größen $x_1 \dots x_m$, $x_1^0 \dots x_m^0 \dots x_m^p$ dem Bereich

$$|x_i - a_i| < R \qquad (i = 1, 2 \dots m)$$

an. Man erhält somit den Voraussetzungen (4) und (5) zufolge aus den Gleichungen (10) die folgenden Ungleichungen:

$$(11)\quad \begin{cases} \left|\dfrac{dz_i^p}{dt}\right| < N_0[z_1^p + \dots + z_m^p] + N_1[|z_1^{p-1}| + \dots + z_m^{p-1}] + \dots \\ \qquad + N_p[|z_1^0| + \dots + |z_m^0|] + \sum_{n=p+1}^{\infty} M_n \\ \qquad (i = 1, 2 \dots m) \end{cases}$$

Die Untersuchung dieser Ungleichungen macht keine Schwierigkeit, wenn man die Lösung des folgenden Differentialsystems kennt:

$$(12)\quad \begin{cases} \dfrac{dZ_i^p}{dt} = \dfrac{\varepsilon}{m}\left\{Z_1^p + \dots + Z_m^p + \mu[Z_1^{p-1} + \dots + Z_m^{p-1}] + \dots \right. \\ \qquad \left. + \mu^p[Z_1^0 + \dots + Z_m^0]\right\} + K_p \\ \qquad (i = 1, 2 \dots m) \end{cases}$$

Dabei sind der Einfachheit halber die folgenden Bezeichnungen eingeführt worden: Es sei M der größte Wert aller Größen m_n und

$$\frac{mM}{\mu} = \varepsilon$$

$$\sum_{n=p+1}^{\infty} M_n = K_p$$

Die Lösung der Gleichungen (12) sei bestimmt durch die Anfangswerte

$$(13)\qquad Z_1^p = Z_2^p = \dots = Z_m^p = A_p \qquad \text{für} \qquad t = t_0$$

Aus der Gleichheit der $Z_1^p \ldots . Z_m^p$ für $t = t_0$ folgt die Gleichheit dieser Größen für das ganze Intervall $|t - t_0| \leq \tau$. Setzt man daher

$$Z_1^p = Z_2^p \cdot \cdots = Z_m^p = Z_p$$

so erhält man statt der Gleichungen (12) die folgenden einfacheren:

$$(14) \quad \begin{cases} \dfrac{dZ_0}{dt} = \varepsilon Z_0 + K_0 \\ \dfrac{dZ_1}{dt} = \varepsilon [\mu Z_0 + Z_1] + K_1 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \dfrac{dZ_p}{dt} = \varepsilon [\mu^p Z_0 + \mu^{p-1} Z_1 + \cdots + Z_p] + K_p \end{cases}$$

Nach der Theorie der linearen Substitutionen läßt sich dieses System in das folgende transformieren:

$$(15) \quad \begin{cases} \dfrac{dY_0}{dt} = \varepsilon Y_0 \\ \dfrac{dY_1}{dt} = \varepsilon (Y_1 + Y_0) \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \dfrac{dY_p}{dt} = \varepsilon (Y_p + Y_{p-1}) \end{cases}$$

Die Substitution lautet:

$$(16) \quad \begin{cases} Z_0 = Y_0 - \dfrac{1}{\varepsilon} K_0 \\ Z_1 = \mu Y_1 - \dfrac{1}{\varepsilon} [K_1 - \mu K_0] \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ Z_p = \mu^p \left[Y_p + \binom{p-1}{1} Y_{p-1} + \cdots + \binom{p-1}{1} Y_2 + Y_1 \right] - \dfrac{1}{\varepsilon} [K_p - \mu K_{p-1}] \end{cases}$$

Die Gleichungen (15) lassen sich nun in einfacher Weise integrieren; die Lösung ist:

$$(17) \quad \begin{cases} Y_q = e^{\varepsilon (t-t_0)} \left[B_q + B_{q-1} \varepsilon (t - t_0) + B_{q-2} \dfrac{\varepsilon^2 (t-t_0)^2}{2!} + \cdots + B_0 \dfrac{\varepsilon^q (t-t_0)^q}{q!} \right] \\ q = 0, 1, 2 \ldots . p \end{cases}$$

Die Konstanten $B_0 \ldots . B_p$ sind die Anfangswerte der Größen $Y_0 \ldots . Y_p$ für $t = t_0$ und sind mit den Größen $A_0 \ldots . A_p$ durch die Gleichungen (16) verbunden. Die Auflösung dieser Gleichungen ergibt:

$$B_0 = \tfrac{1}{2}\, \alpha_0$$

$$B_p = \alpha_p - \binom{p-1}{1} \alpha_{p-1} + \cdots + (-1)^{p-2} \binom{p-1}{1} \alpha_2 + (-1)^{p-1} \alpha_1$$

wobei zur Abkürzung gesetzt ist

$$A_0 + \tfrac{1}{2}\, K_0 = \alpha_0$$

$$\frac{1}{\mu_p} \left[A_p + \frac{1}{\varepsilon} [K_p - \mu\, K_{p-1}] \right] = \alpha_p \qquad (p = 1, 2 \ldots . \infty)$$

Dieser Ausdruck kann den Eigenschaften der Größen A_p und K_p zufolge nur von der 0ten oder von höherer Ordnung sein in Bezug auf μ. Sei der absolut größte Wert aller α_p A, so folgt

$$|B_p| \leqq 2^{p-1} A \qquad (p = 0, 1, 2 \ldots . \infty)$$

und daraus

$$Y_q| \leqq 2^{q-1} A\, e^{\varepsilon (t - t_0)} \left[1 + \frac{\varepsilon}{2} (t - t_0) + \frac{\left[\frac{\varepsilon}{2} (t - t_0)\right]^2}{2!} + \cdots . + \frac{\left[\frac{\varepsilon}{2} (t - t_0)\right]^q}{q!} \right]$$

oder

$$|Y_p| \leqq 2^{p-1} A\, e^{\frac{3}{2} \varepsilon (t - t_0)}$$

wobei der Index p nunmehr jede ganze positive Zahl bedeuten kann. Für Z_p erhält man aus (16):

$$Z_p \leqq \frac{A}{4}\, e^{\frac{3}{2} \varepsilon (t - t_0)} \cdot (4\, \mu)^p - \frac{1}{\varepsilon} [K_p - \mu\, K_{p-1}]$$

Da

$$\left| \frac{1}{\varepsilon} [K_p - \mu\, K_{p-1}] \right| < \frac{2\, M}{\varepsilon} \frac{\mu^{p+1}}{1-\mu} = \frac{2}{m} \frac{\mu^{p+2}}{1-\mu}$$

so folgt für $|t = t_0| \leq \tau$

$$Z_p < \frac{A}{4}\, e^{\frac{3}{2} \varepsilon \tau} \cdot (4\, \mu)^p + \frac{2}{m} \frac{\mu^{p+2}}{1-\mu} \tag{18}$$

Wählt man p hinreichend groß, so sinkt für einen endlichen Wert von τ Z_p unter jeden beliebigen Kleinheitsgrad, wenn:

$$\mu < \frac{1}{4} \tag{19}$$

Es bleibt jetzt noch übrig, dieselbe Eigenschaft von den Größen $|z_1^p| \ldots . |z_m^p|$ nachzuweisen.

Die Koeffizienten und konstanten Glieder in den Ungleichungen (11) sind alle kleiner oder höchstens gleich den entsprechenden Größen in den Gleichungen (12). Daher hat man, solange

$$|z_i^0| < Z_i^0 \qquad (i = 1, 2 \ldots . m)$$

auch

$$\frac{d|z_i^0|}{dt} < \left|\frac{dz_i}{dt}\right| < \frac{dZ_i^0}{dt}$$

Da

$$|a_i - a_i^0| \leqq A_0$$

so ist für $t = t_0$

$$|z_i^0| < Z_i^0$$

und somit auch

$$\frac{d|z_i^0|}{dt} < \frac{dZ_i^0}{dt}$$

Daraus folgt, daß in einem gewissen Intervall $|t - t_0| \leqq \vartheta$ die Ungleichung besteht

$$|z_i^0| \leqq Z_i^0$$

Für die Grenze dieses Intervalls hat man dann wieder

$$\frac{d|z_i^0|}{dt} < \frac{dZ_i^0}{dt}$$

woraus folgt, daß $|z_1^0| \ldots . |z_m^0|$ auch noch in einem erweiterten Intervall diese Eigenschaft besitzt. Durch Fortsetzung dieser Schlußweise folgt, daß in dem ganzen Bereich $|t - t_0| \leqq \tau$

$$|z_i^0| \leqq Z_i^0 \qquad (i = 1, 2 \ldots . m)$$

Angenommen nun, es sei nachgewiesen, daß für $|t - t_0| < \tau$

$$|z_i^0| \leqq Z_i^0 \ldots . |z_i^{p-1}| \leqq Z_i^{p-1} \qquad (i = 1, 2 \ldots . m)$$

so folgt aus derselben Betrachtung, daß auch für den Index p die Ungleichung besteht

$$|z_i^p| < Z_i^p \tag{21}$$

worin p wieder jede positive ganze Zahl bedeuten kann. Für endliche Werte von τ und unter der Bedingung (19) lassen sich also auch die Größen $z_1^p \ldots . z_m^p$ ihrem absoluten Betrag nach beliebig klein machen, wenn man nur p genügend groß wählt.

10. Damit ist die Auflösung des Differentialsystems (1) auf die der folgenden einfacheren Systeme zurückgeführt:

$$(22)\qquad \begin{cases} \dfrac{dx_i^0}{dt} = f_{i,0}\,[t, x_1^0 \ldots . x_m^0] \\ \dfrac{dx_i^p}{dt} = f_{i,0}\,[t, x_1^p \ldots . x_m^p] + f_i^p(t) \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} i = 1, 2 \ldots . m \\ p = 1, 2 \ldots . \infty \end{pmatrix}$$

In diesen sind die $f_i^p(t)$ stetige Funktionen der unabhängigen Variabeln und genügen für $|t - t_0| \leq \tau$ den Ungleichungen

$$|f_i^p(t)| < f \cdot \mu$$

wo f eine endliche positive Größe bedeutet.

Die Gleichungen (22) lassen sich in verschiedener Weise behandeln. Im allgemeinen wird sich die Untersuchung wiederum nur mit Hilfe sukzessiver Näherungen durchführen lassen. Da besitzt wegen seiner Einfachheit besondere Bedeutung der Fall, daß die Funktionen $f_{i,0}$ linear sind in Bezug auf die Variabeln $x_1^p \ldots . x_m^p$, mit stetigen Funktionen von t zu Koeffizienten. Die Gleichungen lauten dann:

$$(23)\qquad \begin{cases} \dfrac{dx_i^0}{dt} = A_{i,1}\,x_1^0 \cdot \ldots . + A_{i,m}\,x_m^0 \\ \dfrac{dx_i^p}{dt} = A_{i,1}\,x_1^p \cdot \ldots . + A_{i,m}\,x_m^p + f_i^p(t) \end{cases}$$

und können nach der Theorie der linearen Differentialgleichungen untersucht werden. Nach den Bemerkungen in Nr. 7 bedarf man nur der Kenntnis eines Fundamentalsystems partikulärer Lösungen, um die vollständige Lösung zu kennen; bei den Gleichungen mit sekundärem Glied führt die Variation der Konstanten unmittelbar auf Quadraturen. Das ist nicht so bei den allgemeineren Gleichungen (22). Setzt man hier die Lösung des ersten Systems als bekannt voraus

$$x_i^0 = \varphi_i\,[t, c_1 \ldots . c_m]$$

und löst die folgenden Systeme durch eine Variation der Konstanten $c_1 \ldots . c_m$ auf, so werden die Differentialquotienten der $c_1 \ldots . c_m$ nach t wieder Funktionen dieser Größen.[1])

[1]) Um die Variation der Konstanten anwenden zu können, muß man auch für die ersten Ableitungen der $f_{i,0}$ nach $x_1 \ldots . x_m$ Stetigkeit voraussetzen.

Kann man aber von den Funktionen $f_{i,0}[t, x_1^p \ldots x_m^p]$ weiterhin voraussetzen, daß sie für $|t - t_0| \leq \tau$ in Potenzreihen von

$$x_1^p - \varphi_1 \ldots x_m^p - \varphi_m$$

entwickelbar sind, so lassen sich für die Lösung von (22) konvergente Entwickelungen angeben, deren einzelne Glieder Gleichungen von der Form (23) genügen.

Dieses Verfahren vereinfacht sich wesentlich, wenn man die gleiche Voraussetzung auch über die Funktionen $f_{i,1} \ldots f_{i,p}$ machen kann; denn dann kann man dasselbe gleich auf die Gleichungen (1) anwenden.

Diese Entwickelungsmethode ist zur Untersuchung des vorliegenden Störungsproblems, in welchem die Funktionen $f_{i,0} \ldots f_{i,p}$ alle diese Voraussetzungen erfüllen, angewendet worden. Ihre allgemeinen Eigenschaften ergeben sich leicht mit Hilfe der in Nr. 9 entwickelten Näherungsmethode.

11. Wir setzen also weiterhin die erste Näherung als bekannt voraus

$$x_i^0 = \varphi_i [t, c_1 \ldots c_m]$$

und ferner von den Funktionen $f_{i,n}[t, x_1 \ldots x_m]$, daß sie für den ganzen Wertebereich (3) in Potenzreihen entwickelbar seien von

$$y_i = x_i - x_i^0 \qquad (i = 1, 2 \ldots m) \tag{24}$$

welche stetige Funktionen von t zu Koeffizienten haben.

Es sei:

$$f_{i,n}[t, x_1 \ldots x_m] = f_{i,n}[t, x_1^0 \ldots x_m^0] + \sum_k A_k^{i,n} y_k + \sum_{k,l} A_{k,l}^{i,n} y_k y_l + \cdots \tag{25}$$

$$\begin{pmatrix} i = 1, 2 \ldots m \\ n = 0, 1, 2 \ldots \infty \end{pmatrix}$$

Um die Größenordnung der einzelnen Glieder zu bestimmen, greifen wir auf ein Glied n^{ter} Ordnung in der Entwickelung der Kräfte zurück:

$$r_1^p r_2^q r_0^n \cdot F(v_0, v_1, v_2)$$

$$p + q = n$$

Es sei

$$r_0 = \varrho_0 + \delta\varrho_0 \quad , \quad r_1 = \varrho_1 + \delta\varrho_1 \quad , \quad r_2 = \varrho_2 + \delta\varrho_2$$

wo ϱ_0, ϱ_1, ϱ_2 die Radien-Vektoren für die ungestörte Bewegung bedeuten. Bei der Entwickelung des obenstehenden Ausdrucks nach Potenzen von $\delta\varrho_0$, $\delta\varrho_1$, $\delta\varrho_2$

vermindert jede Differentiation nach r_1 und r_2 die Größenordnung um eine Einheit. Nun wird aber das etwa durch l-malige Differentiation nach r_1 erhaltene Glied multipliziert mit

$$(\delta \varrho_1)^l = a_1^l \cdot \left(\frac{\delta \varrho_1}{a_1}\right)^l$$

Durch den ersten Faktor wird die ursprüngliche Größenordnung des Gliedes wiederhergestellt; der zweite Faktor ist von l^{ter} resp. noch höherer Ordnung. Denkt man sich nämlich in den Gleichungen (1) als neue Veränderliche die bisherigen eingeführt, dividiert durch die entsprechenden Größen a_0, a_1, a_2, so genügen diese wiederum einem Differentialsystem von der Form (1), dessen zugehörige Majoranten die Reihen

$$\frac{1}{a_0} S_0, \qquad \frac{1}{a_1} S_1, \qquad \frac{1}{a_2} S_2$$

sind.

Darnach existiert auch in diesem Fall ein Wertebereich (3), in welchem die Voraussetzungen (4), (5) und (6) erfüllt sind. Daraus aber folgt, daß $\frac{\delta \varrho_0}{a_0}, \frac{\delta \varrho_1}{a_1}, \frac{\delta \varrho_2}{a_2}$ Größen von der ersten resp. höherer Ordnung sind bei entsprechenden Anfangswerten.[1])

Das Differentialsystem, dem die Größen $y_1 \ldots . y_m$ genügen, lautet:

$$(26) \qquad \begin{cases} \dfrac{d y_i}{d t} = A_1^{i,0} y_1 \cdots + A_m^{i,0} y_m + f_{i,1}(t) \\ \quad + \sum_{k,l=1}^{m} A_{k,l}^{i,0} y_k y_l + \sum_{k=1}^{m} A_k^{i,1} y_k + f_{i,2}(t) \qquad (i = 1, 2 \ldots . m) \\ \quad + \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \end{cases}$$

In diesen Gleichungen stellt die erste Zeile der rechten Seite eine Funktion erster Ordnung, die zweite eine solche der zweiten u. s. f. dar. Sie stellen also den speziellen Fall der Differentialgleichungen (1) dar, in welchem die Funktionen $f_{i,n}$ ganze Funktionen der abhängigen Veränderlichen sind. Da die Voraussetzungen (4), (5) und (6) innerhalb eines bestimmten Wertebereiches erfüllt sind, läßt sich die in Nr. 9 entwickelte Integrationsmethode auf die Gleichungen (26) anwenden.

[1]) Es ist:

$$|y_i| < Z_0 < e^{\varepsilon (t - t_0)} + \frac{1}{m} \frac{\mu^2}{1 - \mu} \qquad (i = 1, 2 \ldots . m)$$

Hierin hängt B_0 von den Anfangswerten der $y_1 \ldots . y_m$ gemäß der ersten Gleichung (16) ab und ist von derselben Größenordnung wie diese.

Die Näherungen lauten:

$$(27)\quad \begin{cases} \dfrac{dy_i^1}{dt} = A_1^{i,0}\, y_1^1 + \cdots + A_m^{i,0}\, y_m^1 + f_{i,1}(t) \\ \dfrac{dy_i^2}{dt} = A_1^{i,0}\, y_1^2 + \cdots + A_m^{i,0}\, y_m^2 + f_{i,1}(t) \\ \qquad\qquad + \sum_{k,l=1}^{m} A_{k,l}^{i,0}\, y_k^1\, y_l^1 + \sum_{k=1}^{m} A_k^{i,1}\, y_k^1 + f_{i,2}(t) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{dy_i^p}{dt} = A_1^{i,0}\, y_1^p + \cdots + A_m^{i,0}\, y_m^p + f_{i,1}(t) \\ \qquad\qquad + \sum_{k,l=1}^{m} A_{k,l}^{i,0}\, y_k^{p-1}\, y_l^{p-1} + \sum_{k=1}^{m} A_k^{i,1}\, y_k^{p-1} + f_{i,2}(t) \\ \qquad\qquad + \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \qquad\qquad (i = 1, 2 \ldots . m) \end{cases}$$

Bestimmt man sie durch die Anfangswerte:

$$(28)\quad \begin{cases} y_i^p = b_i^p \\ \lim\limits_{p=\infty} b_i^p = b_i \end{cases} \qquad \text{für} \qquad t = t_0 \qquad (i = 1, 2 \ldots . m)$$

so erhält man:

$$y_i = \lim_{p=\infty} y_i^p \qquad (i = 1, 2 \ldots . m)$$

Für die einzelnen Näherungen erhält man nun in der Tat Gleichungen von der Form (23). Man kann diese dadurch noch etwas vereinfachen, daß man gewisse Glieder unbeschadet der Genauigkeit der Annäherung fortlassen kann.

Nach dem, was in Nr. 7 über lineare Differentialgleichungen gesagt ist, lautet die allgemeine Form der $y_1^p \ldots . y_m^p$:

$$(28')\quad y_i^p = \sum_{k=1}^{p} \eta_i^k + H_i^p \qquad (i = 1, 2 \ldots . m)$$

Hierin sind die $\eta_i^1 \ldots . \eta_i^p$ stetige Funktionen von t, die für $|t - t_0| \leq \tau$ den Ungleichungen genügen:

$$\begin{aligned} |\eta_i^k| &\leq \gamma_k \cdot \mu'^k \qquad \begin{pmatrix} i = 1, 2 \ldots . m \\ k = 1, 2 \ldots . p \end{pmatrix} \\ \mu' &= a\,\mu \end{aligned}$$

wobei unter a und $\gamma_1 \ldots . \gamma_p$ endliche positive Größen zu verstehen sind. In den H_i^p sind alle Glieder $(p+1)^{\text{ter}}$ und höherer Ordnung in Bezug auf μ' zu-

sammengefaßt, die in y_i^p enthalten sind. Die Vereinfachung besteht nun darin, daß man in allen Näherungen die Glieder H_i vernachlässigen kann.

Sei q eine Näherung, die der p^{ten} vorangeht, so kommen in dieser die Größen $y_1^q \ldots . y_m^q$ zu einem Produkt vereinigt vor, das aus $p - q + 1$ Faktoren besteht. Somit sind diejenigen Glieder, welche die $H_1^q \ldots . H_m^q$ enthalten, mindestens von der Ordnung $p + 1$ und können nur zu den $H_1^p \ldots . H_m^p$ einen Beitrag liefern. Auf diese Weise erhält man also die p^{te} Näherung genau bis zu den Gliedern p^{ter} Ordnung einschließlich. Für $p = \infty$ folgt

$$y_i = \sum_{k=1}^{\infty} \eta_i^k \qquad (i = 1, 2 \ldots . m) \tag{29}$$

Es ist nun ohne weiteres klar, daß alle Näherungen zusammen mit $y_1 \ldots . y_m$ in den gemeinschaftlichen Gliedern übereinstimmen müssen. Dies folgt aus den Differentialgleichungen für die Größen $\eta_1^k \ldots . \eta_m^k$. Man erhält diese Gleichungen, indem man die Reihen (28′) und (29) in die Gleichungen (27) resp. (26) einsetzt und die Summe aller Glieder gleicher Ordnung für sich gleich 0 setzt. Damit ist die Entwickelung der Lösung des Differentialsystems (1) in konvergente Reihen für $|t - t_0| \leq \tau$ bewerkstelligt.[1])

[1]) In der Theorie der Planetenbewegungen wird man auf die folgende Form von Differentialgleichungen geführt:

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i[t, x_1 \ldots . x_m, \mu] \qquad (i = 1, 2 \ldots . m) \tag{a}$$

mit der reellen unabhängigen Veränderlichen t, den abhängigen Veränderlichen $x_1 \ldots . x_m$ und dem Parameter μ. (Poincaré: Les méthodes nouvelles de la méc. cél, Bd. I.)

Für $\mu = 0$ besitze das System die Lösung

$$x_i^0 = \varphi_i(t) \qquad (i = 1, 2 \ldots . m)$$

wo $\varphi_i(t)$ stetige Funktionen für $|t - t_0| \leq \tau$ sind. Setzt man für die Funktionen $f_i[t, x_1 \ldots . x_m, \mu]$ in diesem Intervall Entwickelbarkeit voraus in Potenzreihen von

$$\mu,\ x_1 - x_1^0 \ldots . x_m - x_m^0$$

mit stetigen Funktionen von t zu Koeffizienten, so lassen sich die Größen

$$y_i = x_i - x_i^0 \qquad (i = 1, 2 \ldots . m) \tag{b}$$

in konvergente Potenzreihen von μ entwickeln für $|t - t_0| \leq \tau$. Die Differentialgleichungen für diese Größen lauten:

$$\left\{\begin{aligned} \frac{dy_i}{dt} &= A_1^i y_1 \cdot \cdots + A_m^i y_m + \mu A_0^i \\ &+ \sum_{k,l=1}^{m} A_{k,l}^i y_k y_l + \mu \cdot \sum_{k=1}^{m} A_{k,0}^i y_k + \mu^2 A_{0,0}^i \qquad (i = 1, 2 \ldots . m) \\ &+ \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \end{aligned}\right. \tag{c}$$

in welchen die $A_{k,l,m}^i$ u. s. f. stetige Funktionen von t sind. Diese Gleichungen lassen sich in derselben Weise behandeln wie die Gleichungen (26).

Eine andere Untersuchung von Herrn Poincaré findet sich in dem zitierten Werk Bd. I Kap. 2.

III. Anwendung des Vorhergehenden auf die Störungstheorie.

12. Die Differentialgleichungen eines astronomischen Störungsproblems lassen sich allgemein in der folgenden Form schreiben:

$$(1)\qquad \begin{cases} \dfrac{d^2 x_i}{dt^2} = -\lambda_i \dfrac{x_i}{r_i^3} + X_i \\ \dfrac{d^2 y_i}{dt^2} = -\lambda_i \dfrac{y_i}{r_i^3} + Y_i \qquad (i = 1, 2 \ldots . n) \\ \dfrac{d^2 z_i}{dt^2} = -\lambda_i \dfrac{z_i}{r_i^3} + Z_i \end{cases}$$

$\lambda_1 \ldots . \lambda_n$ sind Konstanten; $X_1\, Y_1\, Z_1 \ldots . Z_n$ können Funktionen der Zeit t und der abhängigen Veränderlichen $x_1\, y_1\, z_1 \ldots . z_n$, sowie deren ersten Ableitungen nach der Zeit sein.

Fixieren die Größen

$$x_i,\ y_i,\ z_i\ ;\ r_i = \sqrt{x_i^2 + y_i^2 + z_i^2} \qquad (i = 1, 2 \ldots . n)$$

die gegenseitige Lage von n Punkten im Raum, so sagen die Gleichungen (1) aus, daß bei Nichtberücksichtigung der Funktionen X_i, Y_i, Z_i jeder der Punkte um einen anderen ihm konjugierten Punkt des Systems eine Zentralbewegung entsprechend dem Newtonschen Gesetz ausführt. x_i, y_i, z_i sind die rechtwinkligen Koordinaten des i^{ten} Punktes relativ zu seinem konjugierten; die Richtungen der Koordinatenachsen bleiben vorläufig unbestimmt.

Zur Realisierung eines solchen Systems ist nicht notwendig, daß die n Punkte alle Massenpunkte sind. Wie in dem vorliegenden Problem kann dasselbe auch aus Gruppen von Massenpunkten aufgebaut sein in der Weise, daß innerhalb einer jeden Gruppe die Bewegung um den Schwerpunkt und wiederum die relative Bewegung der Schwerpunkte der verschiedenen Gruppen durch Gleichungen von der Form (1) bestimmt ist.

Wir setzen nun von den Funktionen $X_i\, Y_i\, Z_i$ diejenigen Eigenschaften voraus, die zur Anwendung der im vorigen Abschnitt gewonnenen Resultate auf die Gleichungen (1) erforderlich sind — im übrigen bleiben sie unbestimmt — und betrachten sie als die Komponenten störender Kräfte nach den Koordinatenrichtungen und entsprechend die Zentralbewegung der Punkte als ungestörte Bewegung.

Zur Untersuchung des vorliegenden Störungsproblems ist die Methode der Reihenentwickelung für die Koordinatenstörungen benutzt worden. Es wurde

gezeigt, wie diese Methode nach Auflösung eines Systems linearer Differentialgleichungen, das von der Natur der störenden Kräfte ganz unabhängig ist, nur noch sukzessiv auszuführende Quadraturen übrig läßt. Es ergibt sich somit zunächst die Aufgabe, dieses Gleichungssystem aufzustellen und zu integrieren. Da dasselbe für alle Punkte bis auf willkürliche Konstanten — die Elemente der ungestörten Bewegung — das gleiche ist, so wird im folgenden der Einfachheit wegen der Index i fortgelassen.

Es seien ξ, η, ζ die rechtwinkligen Koordinaten, ϱ der Radius Vektor, w die wahre Anomalie in der ungestörten Bahn. Wir bestimmen jetzt die Richtung des Koordinatensystems so, daß die x, y-Ebene mit der Bahnebene der ungestörten Bewegung zusammenfällt, und bezeichnen den Positionswinkel der Nullrichtung von w mit π. Für ξ, η, ζ bestehen dann die Gleichungen:

$$(2) \qquad \begin{cases} \xi = \varrho \cos(w + \pi) \\ \eta = \varrho \sin(w + \pi) \\ \zeta = 0 \end{cases}$$

Ferner setzen wir

$$(3) \qquad \begin{cases} x = \xi + \delta\xi \\ y = \eta + \delta\eta \\ z = \zeta + \delta\zeta \end{cases}$$

Unter Berücksichtigung dieser Gleichungen erhält man das gesuchte Gleichungssystem in der folgenden Form:

$$(4) \qquad \begin{cases} \frac{d^2\delta\xi}{dt^2} = \frac{\lambda}{2\varrho^3}[1 + 3\cos 2(w+\pi)]\cdot\delta\xi + \frac{3\lambda}{2\varrho^3}\sin 2(w+\pi)\cdot\delta\eta + \Xi(t) \\ \frac{d^2\delta\eta}{dt^2} = \frac{3\lambda}{2\varrho^3}\sin 2(w+\pi)\cdot\delta\xi + \frac{\lambda}{2\varrho^3}[1 - 3\cos 2(w+\pi)]\cdot\delta\eta + H(t) \\ \frac{d^2\delta\zeta}{dt^2} = -\frac{\lambda}{\varrho^3}\cdot\delta\zeta + Z(t) \end{cases}$$

13. Durch Einführung neuer Variabeler lassen sich diese Gleichungen wesentlich vereinfachen und bequem integrabel machen. Die beiden ersten Gleichungen bilden ein System für sich und sollen zuerst untersucht werden.

Die mit $\frac{\sin}{\cos}$ $2(w+\pi)$ multiplizierten Glieder lassen sich von diesen Faktoren befreien durch Einführung eines beweglichen Koordinatensystems, dessen x-Achse beständig durch den ungestörten Ort des Punktes geht.

Diese Transformation ist aber noch nicht die allgemeinste, die das Verlangte leistet; diese lautet vielmehr:

$$\zeta_1 = [\delta\xi \cos(w+\pi) + \delta\eta \sin(w+\pi)]\, f(w)$$

$$\zeta_2 = [\delta\xi \sin(w+\pi) + \delta\eta \cos(w+\pi)]\, g(w)$$

wo $f(w)$ und $g(w)$ beliebige Funktionen von w sind, die so bestimmt werden sollen, daß die Transformation besonders einfach wird. Als unabhängige Veränderliche führen wir statt der Zeit die wahre Anomalie ein. Indem wir die ungestörte Bewegung auf die elliptische beschränken, bezeichnen wir mit a die große Halbachse, mit n die mittlere Winkelgeschwindigkeit und mit e die Exzentrizität der Bahn. Die Transformation von t auf w geschieht dann mittels der Relationen:

$$\frac{d^2\zeta}{dw^2} = \left[\frac{d^2\zeta}{dt^2} - \frac{d\zeta}{dt}\frac{d^2w}{dt^2}\right]\frac{1}{\left(\frac{dw}{dt}\right)^2}$$

$$\frac{dw}{dt} = \frac{n a^2 \sqrt{1-e^2}}{\varrho^2} \quad ; \quad \frac{d^2w}{dt^2} = -\frac{2n^2a^3}{\varrho^3}\, e \sin w$$

wo ζ eine der beiden Größen ζ_1, ζ_2 bedeutet.

Berücksichtigt man noch die Beziehung

$$\lambda = n^2 a^3$$

so gehen nach Ausführung der Transformation die beiden ersten Gleichungen (4) über in die folgenden:

$$\frac{d^2\zeta_1}{dw^2} = \zeta_1\left[\frac{f''}{f} - \left(2\frac{f'}{f} + p\right)\frac{f'}{f} + 2q + 1\right] - \zeta_2\left[2\frac{g'}{g} + p\right]\frac{f}{g} + \frac{d\zeta_1}{dw}\left[2\frac{f'}{f} + p\right] + 2\frac{d\zeta_2}{dw}\frac{f}{g}$$

$$\frac{d^2\zeta_2}{dw^2} = -\zeta_1\left[2\frac{f'}{f} + p\right]\frac{g}{f} + \zeta_2\left[\frac{g''}{g} - \left(2\frac{g'}{g} + p\right)\frac{g'}{g} - q + 1\right] - 2\frac{d\zeta_1}{dw}\frac{g}{f} + \frac{d\zeta_2}{dw}\left[2\frac{g'}{g} + p\right]$$

In diesen Gleichungen ist zur Abkürzung gesetzt

$$p = \frac{2e\sin w}{1 + e\cos w} \quad ; \quad q = \frac{1}{1 + e\cos w}$$

Die Ableitungen der Funktionen f und g nach w sind durch die angehängten Indices bezeichnet; ferner sind der Kürze wegen die sekundären Glieder fortgelassen worden.

Die beiden Differentialgleichungen

$$\frac{dW}{dw} + \frac{p}{2} W = 0$$

$$\frac{d^2 W}{dw^2} + (1 - q) W = 0$$

besitzen die gleiche Lösung

$$W = \text{constans} \times [1 + e \cos w]^{1})$$

Daraus ergibt sich ohne weiteres die Wahl von f und g; wir setzen

$$f = g = \frac{1}{\varrho}$$

und erhalten damit die Gleichungen:

$$\frac{d^2 \zeta_1}{dw^2} = \frac{3}{1 + e \cos w} \zeta_1 + 2 \frac{d\zeta_2}{dw}$$

$$\frac{d^2 \zeta_2}{dw^2} = - 2 \frac{d\zeta_1}{dw}$$

Zur Umformung der dritten Gleichung (4) empfiehlt sich in entsprechender Weise als neue Veränderliche

$$\zeta_3 = \frac{\delta \zeta}{\varrho}$$

unter gleichzeitiger Einführung von w als unabhängige Veränderliche. Die Gleichung geht dann in ihrem homogenen Teil über in die folgende:

$$\frac{d^2 \zeta_3}{dw^2} = - \zeta_3$$

14. Stellen wir das Ergebnis von Nr. 13 zusammen, so folgt: durch Einführung der neuen Veränderlichen

$$(5) \qquad \begin{cases} \zeta_1 = \frac{1}{\varrho} [\ \ \delta \xi \cos (w + \pi) + \delta \eta \sin (w + \pi)] \\ \zeta_2 = \frac{1}{\varrho} [- \delta \xi \sin (w + \pi) + \delta \eta \cos (w + \pi)] \\ \zeta_3 = \frac{1}{\varrho} \delta \zeta \end{cases}$$

und der wahren Anomalie w der ungestörten Bewegung als unabhängige Veränderliche geht das Gleichungssystem (4) über in das folgende:

[1]) Die beiden partikulären Lösungen der zweiten Gleichung sind einander gleich.

$$(6)\qquad \begin{cases} \dfrac{d^2\zeta_1}{dw^2} = \dfrac{3}{1+e\cos w}\,\zeta_1 + 2\,\dfrac{d\zeta_2}{dw} + Z_1(w) \\ \dfrac{d^2\zeta_2}{dw^2} = \qquad\qquad - 2\,\dfrac{d\zeta_1}{dw} + Z_2(w) \\ \dfrac{d^2\zeta_3}{dw^2} = -\zeta_3 \qquad\qquad + Z_3(w) \end{cases}$$

Nach Auflösung dieser Gleichungen erscheinen die Störungen als Funktionen von w. Es wird sich später als zweckmäßig erweisen, auch nicht w als unabhängige Veränderliche zu betrachten, sondern die exzentrische Anomalie u, zu der sich der Übergang leicht herstellen läßt. Die Abhängigkeit von der Zeit vermittelt dann schließlich die Keplersche Gleichung.

Die Elimination von ζ_2 aus der ersten Gleichung (6) ergibt eine Gleichung der dritten Ordnung zur Bestimmung von ζ_1. Setzt man zur Abkürzung

$$(7')\qquad \begin{cases} h = \dfrac{1+4\,e\cos w}{1+e\cos w} \\ H = Z_1 + 2\int Z_2\,dw \end{cases}$$

so lautet diese:

$$(7)\qquad \frac{d}{dw}\left[\frac{d^2\zeta_1}{dw^2} + h\,\zeta_1\right] = H'$$

wo der Index bei H die Differentiation nach w bedeutet. Um ein Fundamentalsystem von partikulären Lösungen der Gleichung (7) unter Beiseitlassung des sekundären Gliedes zu erhalten, bestimmen wir die Größen z_1, z_2, z_3 aus den Gleichungen

$$(8)\qquad \begin{cases} \dfrac{d^2z_1}{dw^2} + h\,z_1 = 0 \\ \dfrac{d^2z_2}{dw^2} + h\,z_2 = 0 \\ \dfrac{d^2z_3}{dw^2} + h\,z_3 = 1\ ^{1}) \end{cases}$$

z_1, z_2, z_3 bilden ein Fundamentalsystem, wenn die Determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} z_1 & , & z_2 & , & z_3 \\ \dfrac{dz_1}{dw} & , & \dfrac{dz_2}{dw} & , & \dfrac{dz_3}{dw} \\ \dfrac{d^2z_1}{dw^2} & , & \dfrac{d^2z_2}{dw^2} & , & \dfrac{d^2z_3}{dw^2} \end{vmatrix}$$

[1]) Die Konstante der dritten Gleichung ist speziell gleich 1 gesetzt, weil nur partikuläre Lösungen gesucht werden.

nicht identisch verschwindet. Ehe wir die Determinante auswerten, suchen wir die Beziehungen zwischen z_1, z_2, z_3 auf.

Man erhält sie durch Elimination der Glieder hz_1, hz_2, hz_3 aus den Gleichungen (8); die resultierenden Gleichungen lauten:

$$z_1 \frac{d^2 z_2}{dw^2} - z_2 \frac{d^2 z_1}{dw^2} = 0$$

$$z_2 \frac{d^2 z_3}{dw^2} - z_3 \frac{d^2 z_2}{dw^2} = z_2$$

$$z_3 \frac{d^2 z_1}{dw^2} - z_1 \frac{d^2 z_3}{dw^2} = -z_1$$

Die Integration ergibt

$$(9) \qquad \begin{cases} z_1 \frac{dz_2}{dw} - z_2 \frac{dz_1}{dw} = 1 \\ z_2 \frac{dz_3}{dw} - z_3 \frac{dz_2}{dw} = \int z_2 \, dw \\ z_3 \frac{dz_1}{dw} - z_1 \frac{dz_3}{dw} = -\int z_1 \, dw \end{cases}$$

Die Integrationskonstante der ersten Gleichung hat wiederum den speziellen Wert 1 erhalten, die der beiden anderen den Wert 0.

Ist eine Lösung, etwa z_1, bekannt, so werden die beiden anderen mittels Quadraturen gefunden. Aus der ersten Gleichung (9) folgt

$$(10\,a) \qquad z_2 = z_1 \int \frac{dw}{z_1^2}$$

Eliminiert man aus der zweiten und dritten Gleichung (9) $\frac{dz_3}{dw}$, so folgt

$$(10\,b) \qquad z_3 = z_2 \int z_1 \, dw - z_1 \int z_2 \, dw$$

Setzt man nunmehr in den Ausdruck für Δ für die zweiten Ableitungen die aus (8) folgenden Werte ein, so ergibt die Auswertung der Determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} z_1 , & z_2 , & z_3 \\ \frac{dz_1}{dw} , & \frac{dz_2}{dw} , & \frac{dz_3}{dw} \\ -hz_1, & -hz_2, & -hz_3 + 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} z_1 , & z_2 , & z_3 \\ \frac{dz_1}{dw}, & \frac{dz_2}{dw}, & \frac{dz_3}{dw} \\ 0 , & 0 , & 1 \end{vmatrix} = z_1 \frac{dz_2}{dw} - z_2 \frac{dz_1}{dw}$$

und somit nach (9)

$$\Delta = 1$$

Nach den Bemerkungen in Nr. 7 läßt sich jetzt die vollständige Lösung der Gleichung (7) in der Form schreiben

$$\zeta_1 = (c_1 + \gamma_1) z_1 + (c_2 + \gamma_2) z_2 + (c_3 + \gamma_3) z_3$$

c_1, c_2, c_3 sind die Integrationskonstanten; $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ sind Funktionen von w und folgen aus H' mittels Quadraturen. Die Bestimmungsgleichungen für diese Größen lauten

$$z_1 \frac{d\gamma_1}{dw} + z_2 \frac{d\gamma_2}{dw} + z_3 \frac{d\gamma_3}{dw} = 0$$

$$\frac{dz_1}{dw}\frac{d\gamma_1}{dw} + \frac{dz_2}{dw}\frac{d\gamma_2}{dw} + \frac{dz_3}{dw}\frac{d\gamma_3}{dw} = 0$$

$$\frac{d^2z_1}{dw^2}\frac{d\gamma_1}{dw} + \frac{d^2z_2}{dw^2}\frac{d\gamma_2}{dw} + \frac{d^2z_3}{dw^2}\frac{d\gamma_3}{dw} = H'$$

Durch Auflösung derselben erhält man für die Ableitungen von $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ nach w mit Rücksicht auf die Gleichungen (9) die Ausdrücke

$$\frac{d\gamma_1}{dw} = H' \int z_2 \, dw$$

$$\frac{d\gamma_2}{dw} = -H' \int z_1 \, dw$$

$$\frac{d\gamma_3}{dw} = H'$$

und aus diesen die Größen selbst durch Quadratur. Wendet man partielle Integration an, so folgt:

$$\text{(11)} \qquad \begin{cases} \gamma_1 = H \int z_2 \, dw - \int H z_2 \, dw \\ \gamma_2 = -H \int z_1 \, dw + \int H z_1 \, dw \\ \gamma_3 = H \end{cases}$$

Setzt man diese Ausdrücke in die Gleichung für ζ_1 ein, so folgt für ζ_1 der Ausdruck:

$$\zeta_1 = c_1 z_1 + c_2 z_2 + c_3 z_3 + H[z_1 \int z_2 \, dw - z_2 \int z_1 \, dw + z_3] - z_1 \int H z_2 \, dw + z_2 \int H z_1 \, dw$$

oder wegen (10 b)

$$\text{(12 a)} \qquad \zeta_1 = c_1 z_1 + c_2 z_2 + c_3 z_3 - z_1 \int H z_2 \, dw + z_2 \int H z_1 \, dw$$

Nachdem nunmehr ζ_1 bekannt ist, bleiben für ζ_2 nur noch Quadraturen übrig. Durch zweimalige Integration der zweiten Gleichung (6) folgt:

$$\zeta_2 = \tfrac{1}{2} c_3 w + c_4 - 2\int \zeta_1 dw + \int dw \int Z_2 dw \tag{12b}$$

wo c_4 die vierte Integrationskonstante bedeutet.

Es bleibt noch die dritte Gleichung (6) zu integrieren. Läßt man zunächst das sekundäre Glied unberücksichtigt, so besitze die Gleichung die partikulären Lösungen z_5 und z_6.

Aus den Gleichungen

$$\frac{d^2 z_5}{dw^2} + z_5 = 0$$

$$\frac{d^2 z_6}{dw^2} + z_6 = 0$$

folgt wiederum wie früher

$$z_5 \frac{dz_6}{dw} - z_6 \frac{dz_5}{dw} = 1$$

z_5 und z_6 bilden also ein Fundamentalsystem von Lösungen. Bezeichnet man die fünfte und sechste Integrationskonstante mit c_5 und c_6 und ihre Variationen wegen des sekundären Gliedes entsprechend mit γ_5 und γ_6, so lautet der allgemeine Ausdruck für ζ_3:

$$\zeta_3 = (c_5 + \gamma_5) z_5 + (c_6 + \gamma_6) z_6$$

γ_5 und γ_6 erhält man aus den Gleichungen

$$z_5 \frac{d\gamma_5}{dw} + z_6 \frac{d\gamma_6}{dw} = 0$$

$$\frac{dz_5}{dw}\frac{d\gamma_5}{dw} + \frac{dz_6}{dw}\frac{d\gamma_6}{dw} = Z_3$$

Die Auflösung derselben ergibt

$$\begin{cases} \gamma_5 = -\int Z_3 z_6 dw \\ \gamma_6 = +\int Z_3 z_5 dw \end{cases} \tag{13}$$

Für ζ_3 folgt daraus die Gleichung:

$$\zeta_3 = c_5 z_5 + c_6 z_6 - z_5 \int Z_3 z_6 dw + z_6 \int Z_3 z_5 dw \tag{12c}$$

Damit ist die vollständige Auflösung des Gleichungssystems (6) bewerkstelligt. Wir erhalten für diese die folgende Formelzusammenstellung:

Es sei

$$(14)\qquad \begin{cases} H = Z_1 + 2\int Z_2\, dw \\ J = -z_1 \int H z_2\, dw + z_2 \int H z_1\, dw \\ Z = -z_5 \int Z_3 z_6\, dw + z_6 \int Z_3 z_5\, dw \end{cases}$$

Die Auflösung lautet dann:

$$(15)\qquad \begin{cases} \zeta_1 = c_1 z_1 + c_2 z_2 + c_3 z_3 + \mathrm{I} \\ \zeta_2 = -2 c_1 \int z_1\, dw - 2 c_2 \int z_2\, dw + c_3 \left[\tfrac{1}{2} w - 2\int z_3\, dw\right] + c_4 z_4 + \mathrm{II}\ ^{1}) \\ \zeta_3 = c_5 z_5 + c_6 z_6 + \mathrm{III} \\ \mathrm{I} = J \\ \mathrm{II} = \int [2J + \int Z_2\, dw]\, dw \\ \mathrm{III} = Z \end{cases}$$

15. Es sind nun noch die analytischen Ausdrücke für die partikulären Lösungen zu entwickeln.

Für z_1 ergibt sich der Ausdruck

$$\sin w\,[1 + e\cos w]$$

oder nach Hinzufügung eines konstanten Faktors:

$$z_1 = \frac{a}{\varrho}\sin w$$

Daraus folgt z_2 nach der Formel (10a); es ist

$$z_2 = \frac{a}{\varrho}\sin w \int \left(\frac{\varrho}{a}\right)^2 \frac{dw}{\sin^2 w}$$

Führt man nun statt w die exzentrische Anomalie u ein, so läßt sich die Integration leicht ausführen. Es folgt

$$\int \left(\frac{\varrho}{a}\right)^2 \frac{dw}{\sin^2 w} = \frac{1}{\sqrt{1-e^2}} \int \frac{(1 - e\cos u)^3}{\sin^2 u}\, du$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-e^2}} \left[-\operatorname{cotg} u + \frac{3e}{\sin u} - 3e^2 \operatorname{cotg} u - 3e^2 u + \frac{e^3}{\sin u} + e^3 \sin u \right]$$

---

[1]) z_4 ist die vierte partikuläre Lösung; ihr Wert ist 1.

Die Ausdrücke für z_1 und z_2 als Funktionen von u lauten:

$$z_1 = \left(\frac{a}{\varrho}\right)^2 \sqrt{1-e^2}\,\sin u$$

$$z_2 = \left(\frac{a}{\varrho}\right)^2 \left[+\,3\,e\left(1+\frac{e^2}{2}\right) - (1+3\,e^2)\cos u - \frac{e^3}{2}\cos 2u - 3\,e^2 u \sin u\right]$$

z_3 lassen wir vorläufig in der unentwickelten Form stehen; in den Störungsausdrücken I, II und III kommt diese Größe nicht vor.

z_4 ist gleich 1.

Für z_5 und z_6 erhält man die Ausdrücke

$$z_5 = \sin w = \frac{a}{\varrho}\sqrt{1-e^2}\,\sin u$$

$$z_6 = -\cos w = -\frac{a}{\varrho}\,[\cos u - e]$$

Setzt man schließlich

$$(16)\qquad \begin{cases} U_1 = \sqrt{1-e^2}\,\sin u \\ U_2 = 3\,e\left(1+\frac{e^2}{2}\right) - (1+3\,e^2)\cos u - \frac{e^3}{2}\cos 2u - 3\,e^2 u \sin u \\ U_3 = e - \cos u \end{cases}$$

so erhält man die partikulären Lösungen in der folgenden Form:

$$(17)\qquad \begin{cases} z_1 = \left(\frac{a}{\varrho}\right)^2 U_1 \\ z_2 = \left(\frac{a}{\varrho}\right)^2 U_2 \\ z_3 = \left(\frac{a}{\varrho}\right)^2 \sqrt{1-e^2}\left[U_2 \int U_1 \left(\frac{a}{\varrho}\right)^3 du - U_1 \int U_2 \left(\frac{a}{\varrho}\right)^3 du\right] \\ z_4 = 1 \\ z_5 = \frac{a}{\varrho}\,U_1 \\ z_6 = \frac{a}{\varrho}\,U_3 \end{cases}$$

IV. Entwickelung der Störungen erster Ordnung für den Fall, dass sich die vier Massenpunkte in einer Ebene bewegen.

16. Eine besondere Eigentümlichkeit der Fixsternsysteme, auf die die Entwickelung einer Störungstheorie Rücksicht nehmen muß, besteht in der durchweg großen Exzentrizität der Bewegung der einander nahen Komponenten um ihren Schwerpunkt. Entwickelungen nach Potenzen dieser Größe, wie sie in der Theorie der großen Planeten benutzt werden, sind daher hier nicht angängig. Anders verhält es sich mit der Exzentrizität der Bahn der beiden Schwerpunkte S und S' umeinander. Es ist dies wenigstens teilweise darin begründet, daß die Bewegung in dieser Bahn zu langsam erfolgt, als daß sich in dem Zeitraum, über den sich die Beobachtungen erstrecken, eine Abweichung von der Kreisbahn zeigen könnte. Jedenfalls können Reihenentwickelungen nach dieser Größe ohne Nachteil vorgenommen werden.

In der Entwickelung der Störungsfunktion nach Kugelfunktionen, wie sie im ersten Abschnitt gegeben wurde, stellt jedes Glied eine ganze Funktion der rechtwinkligen Koordinaten x_1, y_1 und x_2, y_2 dar, deren Koeffizienten die Koordinaten von S' gegen S enthalten; von den störenden Kräften $X_0\ Y_0\ Z_0 \ldots . Z_2$ gilt das gleiche. Setzt man für die Koordinaten die ungestörten Werte ein und drückt diese durch die exzentrische Anomalie aus, so sind diese Ausdrücke endliche Funktionen der Exzentrizitäten e_1 und e_2.[1])

Eine etwa vorhandene Neigung der Bahnen gegeneinander ändert an dem Charakter der Entwickelungen nichts, da dieselbe nur in die Entwickelungskoeffizienten eingeht. Es möge gleich vorweggenommen werden: Da die partikulären Lösungen der Gleichungen (6) des vorigen Abschnittes die Neigung gar nicht enthalten, kommen Reihenentwickelungen nach Potenzen der Neigung überhaupt nicht vor.

Vermittels der Transformation (5) und der Einführung der wahren Anomalie als unabhängige Veränderliche erhält man die Funktionen $Z_1(w)$, $Z_2(w)$, $Z_3(w)$. Mit den Funktionen X, Y, Z sind diese durch die Relationen verbunden:

[1]) Dies gilt zunächst von den Störungen erster Ordnung; bei den Störungen höherer Ordnung gilt das gleiche von den Koeffizienten der Störungen niederer Ordnung, die zu diesen beitragen.

$$\text{(a)} \qquad \begin{cases} Z_1 = \dfrac{1}{\varrho\left(\dfrac{dw}{dt}\right)^2}\left[X\cos(w+\pi)+Y\sin(w+\pi)\right] \\ Z_2 = \dfrac{1}{\varrho\left(\dfrac{dw}{dt}\right)^2}\left[-X\sin(w+\pi)+Y\cos(w+\pi)\right] \\ Z_3 = \dfrac{1}{\varrho\left(\dfrac{dw}{dt}\right)^2} Z \end{cases}$$

Daraus folgt, daß auch Z_1, Z_2, Z_3 als Funktionen von u die nämliche Eigenschaft besitzen wie X, Y, Z. Die Störungsausdrücke I, II und III besitzen dagegen diese Eigenschaft nicht mehr, da die Größen $z_1 \ldots . z_6$ außer einem in e endlichen Teil noch $\frac{a}{\varrho}$ resp. Potenzen dieser Größe als Faktor enthalten. Somit sind Entwickelungen nach Potenzen von e_1 resp. e_2 nicht gänzlich vermieden. Doch lassen sich diese Reihen, die nach dem Kosinus der Vielfachen der exzentrischen Anomalie fortschreiten, leicht in die Rechnung einführen; die Koeffizienten lassen sich durch einfache Rekursionsformeln berechnen. Konvergent sind die Reihen für jeden Wert der Exzentrizität kleiner als 1.[1])

Im allgemeinen kommen die Koordinaten x_1, y_1 und x_2, y_2 miteinander multipliziert vor und die Ausführung der Integrationen stößt auf besondere Schwierigkeiten wegen der Unmöglichkeit, die Veränderlichen u_1 und u_2 zu trennen. Für die Störungen erster Ordnung, sowie für den Fall, daß nur drei Massenpunkte vorhanden sind, verschwindet die Schwierigkeit. Die allgemeine Form der Integrale lautet dann, wenn man mit ζ die mittlere Anomalie bezeichnet, und zwar für die drei Bahnen durch die Indices 0, 1, 2 unterschieden:

$$\int \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix} (iu + i_0\zeta_0 + \text{const.})\, d\zeta_0$$

resp.

$$\int \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix} (iu + i_0\zeta_0 + \text{const.})\, du$$

u bedeutet eine der Größen u_1 und u_2.

Insofern man die Integrale der ersten Art leicht auf solche der zweiten Art transformieren kann, hat man nur die letzteren zu untersuchen. Sie werden

[1]) Die gleichen Schwierigkeiten hinsichtlich der Entwickelung nach Exzentrizität und Neigung treten in der Theorie der kleinen Planeten und Kometen auf. In der Abhandlung: „Ermittelung der absoluten Störungen in Ellipsen von beliebiger Exzentrizität und Neigung, Teil I“ hat Hansen solche Entwickelungen vollständig vermieden.

entwickelt nach Besselschen Funktionen mit dem Argument $i_0 e \frac{n_0}{n}$, einer kleinen Größe von der Ordnung $\frac{3}{2}$.

Bis auf quadratische und höhere Glieder hat man

$$\text{(b)} \qquad \begin{cases} \zeta_1 = \dfrac{\delta \varrho}{\varrho} \\ \zeta_2 = \delta w \end{cases}$$

wo $\delta \varrho$ die Störung des Radius Vektor, δw die Störung der wahren Anomalie bedeutet; diese Beziehung besteht also für die Störungen erster Ordnung. An Stelle von Z_1 und Z_2 führen wir die Bezeichnung S und T ein; entsprechend den Gleichungen (a) haben wir für diese Größen die Ausdrücke:

$$\text{(c)} \begin{cases} S_0 = \dfrac{1}{\varrho_0 \left(\dfrac{dw_0}{dt}\right)^2} \dfrac{m_1+m_2+m_3+m_4}{(m_1+m_2)(m_3+m_4)} \left(\dfrac{\partial R}{\partial r_0}\right); \; T_0 = \dfrac{1}{\varrho_0 \left(\dfrac{dw_0}{dt}\right)^2} \dfrac{m_1+m_2+m_3+m_4}{(m_1+m_2)(m_3+m_4)} \dfrac{1}{\varrho_0} \left(\dfrac{\partial R}{\partial v_0}\right) \\ S_1 = \dfrac{1}{\varrho_1 \left(\dfrac{dw_1}{dt}\right)^2} \dfrac{1}{m_1+m_2} \dfrac{m_2}{m_1} \left(\dfrac{\partial R}{\partial r_1}\right) \quad ; \; T_1 = \dfrac{1}{\varrho_1 \left(\dfrac{dw_1}{dt}\right)^2} \dfrac{1}{m_1+m_2} \dfrac{m_2}{m_1} \dfrac{1}{\varrho_1} \left(\dfrac{\partial R}{\partial v_1}\right) \\ S_2 = \dfrac{1}{\varrho_2 \left(\dfrac{dw_2}{dt}\right)^2} \dfrac{1}{m_3+m_4} \dfrac{m_4}{m_3} \left(\dfrac{\partial R}{\partial r_2}\right) \quad ; \; T_2 = \dfrac{1}{\varrho_2 \left(\dfrac{dw_2}{dt}\right)^2} \dfrac{1}{m_3+m_4} \dfrac{m_4}{m_3} \dfrac{1}{\varrho_2} \left(\dfrac{\partial R}{\partial v_2}\right) \end{cases}$$

Dabei sollen die eingeklammerten Ableitungen von R bedeuten, daß nur die ersten Glieder der Entwickelung genommen werden sollen und in diese die ungestörten Werte für die Koordinaten einzusetzen sind.

Bemerkung. — Wie bisher werden die verschiedenen Größen, je nachdem sie zur Bewegung von S' um S, A um S oder C um S' gehören, durch die Indices 0, 1, 2 unterschieden. Da die im folgenden vorkommenden Entwickelungen bezüglich der mit dem Index 1 und 2 versehenen Größen einander analog sind, werden in solchen Fällen die Indices weggelassen; alle diese Größen und Ausdrücke erhalten dann den Index 1 oder 2, je nachdem sie sich auf die Bewegung von A oder C beziehen.

Die benutzten Bezeichnungen sind nunmehr folgende:

Elemente der ungestörten Bahn:

$$a, \quad n, \quad e, \quad \pi, \quad \tau$$

$$a_0, \quad n_0, \quad e_0, \quad \pi_0, \quad \tau_0$$

$$\varphi = \pi - \pi_0$$

Veränderliche der ungestörten Bewegung:

	ϱ ;	ϱ_0
wahre Anomalie	w	w_0
exzentrische „	u	u_0
mittlere „	$\zeta = n(t-\tau)$	$\zeta_0 = n_0(t-\tau_0)$
	$\gamma = n_0(\tau-\tau_0)$	

Veränderliche der wahren Bewegung:

$$r = \varrho + \delta\varrho \quad ; \quad v = w + \delta w$$
$$r_0 = \varrho_0 + \delta\varrho_0 \qquad v_0 = w_0 + \delta w_0$$

17. Soweit wie hier erforderlich entwickelt, lautet die Störungsfunktion:

$$(1)\quad R = k^2 \frac{(m_1+m_2)(m_3+m_4)}{4} \left\{ \frac{m_1}{m_2}\frac{r_1^2}{r_0^3}[1+3\cos 2(v_1-v_0)] + \frac{m_3}{m_4}\frac{r_2^2}{r_0^3}[1+3\cos 2(v_2-v_0)] \right\}$$

Daraus erhält man die Funktionen S_0, T_0 .... T_2 nach (c).
Berücksichtigt man die Relationen (a) in Nr. 6, so folgt:

$$(2)\begin{cases} S_0 = -\frac{3}{4}\frac{1}{a_0(1-e_0^2)} \left\{ \frac{m_1}{m_2}\frac{\varrho_1^2}{\varrho_0}[1+3\cos 2(w_1-w_0+\varphi_1)] + \frac{m_3}{m_4}\frac{\varrho_2^2}{\varrho_0}[1+3\cos 2(w_2-w_0+\varphi_2)] \right\} \\ T_0 = +\frac{3}{2}\frac{1}{a_0(1-e_0^2)} \left\{ \frac{m_1}{m_2}\frac{\varrho_1^2}{\varrho_0}\sin 2(w_1-w_0+\varphi_1) + \frac{m_3}{m_4}\frac{\varrho_2^2}{\varrho_0}\sin 2(w_2-w_0+\varphi_2) \right\} \\ S_1 = +\frac{1}{2}\frac{1}{a_1(1-e_1^2)} \frac{(m_1+m_2)^2(m_3+m_4)}{m_2^3}\frac{\varrho_1^4}{\varrho_0^3}[1+3\cos 2(w_1-w_0+\varphi_1)] \\ T_1 = -\frac{3}{2}\frac{1}{a_1(1-e_1^2)} \frac{(m_1+m_2)^2(m_3+m_4)}{m_2^3}\frac{\varrho_1^4}{\varrho_0^3}\sin 2(w_1-w_0+\varphi_1) \\ S_2 = +\frac{1}{2}\frac{1}{a_2(1-e_2^2)} \frac{(m_1+m_2)(m_3+m_4)^2}{m_4^3}\frac{\varrho_2^4}{\varrho_0^3}[1+3\cos 2(w_2-w_0+\varphi_2)] \\ T_2 = -\frac{3}{2}\frac{1}{a_2(1-e_2^2)} \frac{(m_1+m_2)(m_3+m_4)^2}{m_4^3}\frac{\varrho_2^4}{\varrho_0^3}\sin 2(w_2-w_0+\varphi_2) \end{cases}$$

Man hat nun die Funktionen H und J zu bilden. Zu dem Zwecke führen wir das Integral ein

$$\Theta = \int \left(\frac{\varrho}{a}\right)^2 \frac{a_0}{\varrho_0} \sin 2(w-w_0+\varphi)\, dw_0$$

und betrachten Θ als eine Funktion von u. Mit Hilfe von Θ lassen sich die zweiten Glieder in H, die durch Integration über T_0, T_1, T_2 entstehen, bequem darstellen. Für die Transformation von dw auf dw_0, die auch weiterhin noch benützt wird, dienen die Gleichungen

$$\varrho^2 dw = n\, a^2 \sqrt{1-e^2}\, dt$$

$$\varrho_0^2 dw_0 = n_0 a_0^2 \sqrt{1-e_0^2}\, dt$$

Ferner werden noch folgende aus den Gleichungen (a) in Nr. 6 sich ergebenden Relationen gebraucht:

$$\left(\frac{a_1}{a_0}\right)^3 \frac{(m_1+m_2)^2}{m_3^2} = \left(\frac{n_0}{n_1}\right)^2 \frac{1}{m_1+m_2+m_3+m_4}$$

$$\left(\frac{a_2}{a_0}\right)^3 \frac{(m_3+m_4)^2}{m_4^3} = \left(\frac{n_0}{n_2}\right)^2 \frac{1}{m_1+m_2+m_3+m_4}$$

Man erhält:

$$2\int T_0\, dw_0 = \frac{3}{1-e_0^2}\left[\frac{m_1}{m_2}\left(\frac{a_1}{a_0}\right)^2 \Theta_1 + \frac{m_3}{m_4}\left(\frac{a_2}{a_0}\right)^2 \Theta_2\right]$$

$$2\int T_1\, dw_1 = -\frac{3}{\sqrt{(1-e_0^2)(1-e_1^2)}} \frac{m_3+m_4}{m_1+m_2+m_3+m_4} \frac{n_0}{n_1} \Theta_1$$

$$2\int T_2\, dw_2 = -\frac{3}{\sqrt{(1-e_0^2)(1-e_2^2)}} \frac{m_1+m_2}{m_1+m_2+m_3+m_4} \frac{n_0}{n_2} \Theta_2$$

und somit:

$$H_0 = -\frac{3}{4(1-e_0^2)} \frac{m_1}{m_2}\left(\frac{a_1}{a_0}\right)^2 \left\{\left(\frac{\varrho_1}{a_1}\right)^2 \frac{a_0}{\varrho_0}\left[1+3\cos 2\,(w_1-w_0+\varphi_1)\right] - 4\,\Theta_1\right\}$$

$$-\frac{3}{4(1-e_0^2)} \frac{m_3}{m_4}\left(\frac{a_2}{a_0}\right)^2 \left\{\left(\frac{\varrho_2}{a_2}\right)^2 \frac{a_0}{\varrho_0}\left[1+3\cos 2\,(w_2-w_0+\varphi_2)\right] - 4\,\Theta_2\right\}$$

$$H_1 = \frac{1}{2\sqrt{(1-e_0^2)(1-e_1^2)}} \frac{m_3+m_4}{m_1+m_2+m_3+m_4} \frac{n_0}{n_1}\left\{\frac{n_0}{n_1}\sqrt{\frac{1-e_0^2}{1-e_1^2}}\left(\frac{\varrho_1}{a_1}\right)^4\left(\frac{a_0}{\varrho_0}\right)^3\left[1+3\cos 2\,(w_1-w_0+\varphi_1)\right] - 6\,\Theta_1\right\}$$

$$H_2 = \frac{1}{2\sqrt{(1-e_0^2)(1-e_2^2)}} \frac{m_1+m_2}{m_1+m_2+m_3+m_4} \frac{n_0}{n_2}\left\{\frac{n_0}{n_2}\sqrt{\frac{1-e_0^2}{1-e_2^2}}\left(\frac{\varrho_2}{a_2}\right)^4\left(\frac{a_0}{\varrho_0}\right)^3\left[1+3\cos 2\,(w_2-w_0+\varphi_2)\right] - 6\,\Theta_2\right\}$$

Die Funktion unter dem Integralzeichen in Θ kann als Funktion der Veränderlichen w_0 und u aufgefaßt werden. Integriert man darnach partiell, so folgt:

$$\Theta = \frac{1}{2(1-e_0^2)}\left(\frac{\varrho}{a}\right)^2 [e_0\cos(2w - w_0 + 2\varphi) + \cos(2w - 2w_0 + 2\varphi) + \frac{e_0}{3}\cos(2w - 3w_0 + 2\varphi)]$$

$$- \frac{1}{2(1-e_0^2)}\int \frac{\partial}{\partial u}\left[\left(\frac{\varrho}{a}\right)^2 [e_0\cos(2w - w_0 + 2\varphi) + \cos(2w - 2w_0 + 2\varphi) + \frac{e_0}{3}\cos(2w - 3w_0 + 2\varphi)]\right] du$$

Die Funktion J_0. — Es ist

$$J_0 = \left(\frac{a_0}{\varrho_0}\right)^2 \left\{ - U_1 \int H_0 U_2 \left(\frac{a_0}{\varrho_0}\right)^2 dw_0 + U_2 \int H_0 U_1 \left(\frac{a_0}{\varrho_0}\right)^2 dw_0 \right\}$$

Das Argument der Funktionen U_1 und U_2 ist u_0.

Es wird statt w_0 als Integrationsvariabele u_0 eingeführt; dies geschieht mittels der Beziehung

$$dw_0 = \sqrt{1 - e_0^2}\,\frac{a_0}{\varrho_0}\,du_0$$

Wir führen folgende Funktionen Γ_0 und Δ_0 ein:

$$\Gamma_0 = - U_1 \int U_2 \left(\frac{\varrho}{a}\right)^2 \left(\frac{a_0}{\varrho_0}\right)^3 dw_0 + U_2 \int U_1 \left(\frac{\varrho}{a}\right)^2 \left(\frac{a_0}{\varrho_0}\right)^3 dw_0$$

$$\Delta_0 = - U_1 \int U_2 \left[3\left(\frac{\varrho}{a}\right)^2 \left(\frac{a_0}{\varrho_0}\right)^3 \cos 2(w - w_0 + \varphi) - 4\left(\frac{a_0}{\varrho_0}\right)^2 \Theta\right] dw_0$$

$$+ U_2 \int U_1 \left[3\left(\frac{\varrho}{a}\right)^2 \left(\frac{a_0}{\varrho_0}\right)^3 \cos 2(w - w_0 + \varphi) - 4\left(\frac{a_0}{\varrho_0}\right)^2 \Theta\right] dw_0$$

Für Γ_0 erhält man augenblicklich

$$\Gamma_0 = - \sqrt{1 - e_0^2}\left[U_1 \int U_2 \left(\frac{\varrho}{a}\right)^2 \left(\frac{a_0}{\varrho_0}\right)^4 du_0 - U_2 \int U_1 \left(\frac{\varrho}{a}\right)^2 \left(\frac{a_0}{\varrho_0}\right)^4 du_0\right]$$

Da

$$3\frac{a_0}{\varrho_0}\cos 2(w - w_0 + \varphi) = \frac{3}{1 - e_0^2}\left[\frac{1}{2}e_0\cos(2w - w_0 + 2\varphi) + \cos(2w - 2w_0 + 2\varphi) + \frac{3}{2}e_0\cos(2w - 3w_0 + 2\varphi)\right]$$

folgt:

$$3\left(\frac{\varrho}{a}\right)^2\left(\frac{a_0}{\varrho_0}\right)^3\cos 2\,(w-w_0+\varphi)-4\left(\frac{a_0}{\varrho_0}\right)^2\Theta=$$

$$+\frac{1}{1-e_0^2}\left(\frac{\varrho}{a}\right)^2\left(\frac{a_0}{\varrho_0}\right)^2\Big[-\frac{1}{2}e_0\cos(2w-w_0+2\varphi)+\cos(2w-2w_0+2\varphi)+\frac{5}{6}e_0\cos(2w-3w_0+2\varphi)\Big]$$

$$+\frac{2}{1-e_0^2}\left(\frac{a_0}{\varrho_0}\right)^2\int\frac{\partial}{\partial u}\Big[\left(\frac{\varrho}{a}\right)^2\Big[e_0\cos(2w-w_0+2\varphi)+\cos(2w-2w_0+2\varphi)+\frac{e_0}{3}\cos(2w-3w_0+2\varphi)\Big]\Big]du$$

Wir definieren als Hilfsfunktionen Ψ und Ω die Ausdrücke:

$$\Psi=\frac{1}{2}\left(\frac{\varrho}{a}\right)^2\Big[-\frac{1}{2}e_0\cos(2w-w_0+2\varphi)+\cos(2w-2w_0+2\varphi)+\frac{5}{6}e_0\cos(2w-3w_0+2\varphi)\Big]$$

$$\Omega=\sqrt{1-e^2}\int\frac{\partial}{\partial u}\Big[\left(\frac{\varrho}{a}\right)^2\Big[e_0\cos(2w-w_0+2\varphi)+\cos(2w-2w_0+2\varphi)+\frac{e_0}{3}\cos(2w-3w_0+2\varphi)\Big]\Big]du$$

Für Δ_0 ergibt sich dann der Ausdruck:

$$\Delta_0=-\frac{2}{\sqrt{(1-e_0^2)(1-e^2)}}\Big[U_1\int U_2[\Psi\sqrt{1-e^2}+\Omega]\left(\frac{a_0}{\varrho_0}\right)^3du_0-U_2\int U_1[\Psi\sqrt{1-e^2}+\Omega]\left(\frac{a_0}{\varrho_0}\right)^3du_0\Big]$$

J_0 erhält man nunmehr in der Form:

$$J_0=-\frac{3}{4(1-e_0^2)}\frac{m_1}{m_2}\left(\frac{a_1}{a_0}\right)^2[I'_{01}+\Delta_{01}]-\frac{3}{4(1-e_0^2)}\frac{m_3}{m_4}\left(\frac{a_2}{a_0}\right)^2[I'_{02}+\Delta_{02}]$$

Die Funktionen J_1 und J_2. — Es ist

$$J=\left(\frac{\varrho}{a}\right)^2\Big\{-U_1\int H\,U_2\left(\frac{a}{\varrho}\right)^2dw+U_2\int H\,U_1\left(\frac{a}{\varrho}\right)^2dw\Big\}$$

Das Argument der Funktionen U_1 und U_2 ist u.
Wir führen die beiden Funktionen I' und Δ ein:

$$I'=-\frac{n_0}{n}\sqrt{\frac{1-e_0^2}{1-e^2}}\Big[U_1\int U_2\left(\frac{\varrho}{a}\right)^2\left(\frac{a_0}{\varrho_0}\right)^3dw-U_2\int U_1\left(\frac{\varrho}{a}\right)^2\left(\frac{a_0}{\varrho_0}\right)^3dw\Big]$$

$$\Delta=-U_1\int U_2\Big[\frac{n_0}{n}\sqrt{\frac{1-e_0^2}{1-e^2}}\left(\frac{\varrho}{a}\right)^2\left(\frac{a_0}{\varrho_0}\right)^3\cos 2\,(w-w_0+\varphi)-2\left(\frac{a}{\varrho}\right)^2\Theta\Big]dw$$

$$+U_2\int U_1\Big[\frac{n_0}{n}\sqrt{\frac{1-e_0^2}{1-e^2}}\left(\frac{\varrho}{a}\right)^2\left(\frac{a_0}{\varrho_0}\right)^3\cos 2\,(w-w_0+\varphi)-2\left(\frac{a}{\varrho}\right)^2\Theta\Big]dw$$

Für I folgt:

$$I = -U_1 \int U_2 \frac{a_0}{\varrho_0} dw_0 + U_2 \int U_1 \frac{a_0}{\varrho_0} dw_0$$

$$= \frac{1}{1-e_0^2}\left[U_1 \int U_2' (w_0 + e_0 \sin w_0)\, du - U_2 \int U_1' (w_0 + e_0 \sin w_0)\, du\right]$$

U_1' und U_2' sind die Ableitungen von U_1 und U_2 nach u.
Für Δ ergibt sich:

$$\Delta = -U_1 \int U_2 \frac{a_0}{\varrho_0} \cos 2(w - w_0 + \varphi)\, dw_0 + U_2 \int U_1 \frac{a_0}{\varrho_0} \cos 2(w - w_0 + \varphi)\, dw_0$$

$$+ 2\sqrt{1-e^2}\left[U_1 \int \Theta\, U_2 \left(\frac{a}{\varrho}\right)^3 du - U_2 \int \Theta\, U_1 \left(\frac{a}{\varrho}\right)^3 du\right]$$

Den Ausdruck der ersten Zeile fassen wir als Funktion von u, w und w_0 auf; durch partielle Integration wird er zu dem folgenden umgeformt:

$$-\frac{1}{1-e_0^2}\Big[\; U_1 \int U_2 [e_0 \cos(2w - w_0 + 2\varphi) + \cos(2w - 2w_0 + 2\varphi) + \frac{e_0}{3}\cos(2w - 3w_0 + 2\varphi)]\, dw$$

$$- U_2 \int U_1 [e_0 \cos(2w - w_0 + 2\varphi) + \cos(2w - 2w_0 + 2\varphi) + \frac{e_0}{3}\cos(2w - 2w_0 + 2\varphi)]\, dw\Big]$$

$$-\frac{1}{2(1-e_0^2)}\Big[\; U_1' \int U_2' [e_0 \sin(2w - w_0 + 2\varphi) + \sin(2w - 2w_0 + 2\varphi) + \frac{e_0}{3}\sin(2w - 3w_0 + 2\varphi)]\, du$$

$$- U_2 \int U_1' [e_0 \sin(2w - w_0 + 2\varphi) + \sin(2w - 2w_0 + 2\varphi) + \frac{e_0}{3}\sin(2w - 3w_0 + 2\varphi)]\, du\Big]$$

Setzt man diesen Ausdruck in Δ ein, so erkennt man, daß der erste Klammerausdruck sich weghebt, und von Θ nur der mit Ω bezeichnete Teil stehen bleibt. Wir führen die weitere Hilfsfunktion Φ ein

$$\Phi = \frac{1}{2}\left(\frac{\varrho}{a}\right)^2 \left[e_0 \sin(2w - w_0 + 2\varphi) + \sin(2w - 2w_0 + 2\varphi) + \frac{e_0}{3}\sin(2w - 3w_0 + 2\varphi)\right]$$

und erhalten für Δ:

$$\Delta = -\frac{1}{1-e_0^2}\left[U_1 \int \left[U_2' \Phi \left(\frac{a}{\varrho}\right)^2 + U_2 \Omega \left(\frac{a}{\varrho}\right)^3\right] du - U_2 \int \left[U_1' \Phi \left(\frac{a}{\varrho}\right)^2 + U_1 \Omega \left(\frac{a}{\varrho}\right)^3\right] du\right]$$

Die Ausdrücke für J_1 und J_2 lauten:

$$J_1 = \frac{1}{2\sqrt{(1-e_0^2)(1-e_1^2)}} \frac{m_3 + m_4}{m_1 + m_2 + m_3 + m_4} \frac{n_0}{n_1} \left(\frac{a_1}{\varrho_1}\right)^2 [I_1 + 3\Delta_1]$$

$$J_2 = \frac{1}{2\sqrt{(1-e_0^2)(1-e_2^2)}} \frac{m_1 + m_2}{m_1 + m_2 + m_3 + m_4} \frac{n_0}{n_2} \left(\frac{a_2}{\varrho_2}\right)^2 [I_2 + 3\Delta_2]$$

18. Für die Störungsausdrücke I und II erhalten wir somit die folgende Formelzusammenstellung:

Es sei

$$(3)\quad \begin{cases} \Phi = \frac{1}{2}\left(\frac{\varrho}{a}\right)^2\Big[\ e_0\sin(2w-w_0+2\varphi)+\sin(2w-2w_0+2\varphi)+\frac{e_0}{3}\sin(2w-3w_0+2\varphi)\Big] \\ \Psi = \frac{1}{2}\left(\frac{\varrho}{a}\right)^2\Big[-\frac{e_0}{2}\cos(2w-w_0+2\varphi)+\cos(2w-2w_0+2\varphi)+\frac{5}{6}e_0\cos(2w-3w_0+2\varphi)\Big] \\ \Omega = \sqrt{1-e^2}\int\frac{\partial}{\partial u}\Big[\left(\frac{\varrho}{a}\right)^2\big[e_0\cos(2w-w_0+2\varphi)+\cos(2w-2w_0+2\varphi)+\frac{e_0}{3}\cos(2w-3w_0+2\varphi)\big]\Big]du \end{cases}$$

Aus diesen Hilfsfunktionen werden die folgenden Ausdrücke gebildet:

$$(4)\quad \begin{cases} I_0' = -\sqrt{1-e_0^2}\Big[U_1\int U_2\left(\frac{\varrho}{a}\right)^2\left(\frac{a_0}{\varrho_0}\right)^4 du_0 - U_2\int U_1\left(\frac{\varrho}{a}\right)^2\left(\frac{a_0}{\varrho_0}\right)^4 du_0\Big] \\ \Delta_0 = -\frac{2}{\sqrt{(1-e_0^2)(1-e^2)}}\Big[U_1\int U_2[\sqrt{1-e^2}\,\Psi+\Omega]\left(\frac{a_0}{\varrho_0}\right)^3 du_0 - U_2\int U_1[\sqrt{1-e^2}\,\Psi+\Omega]\left(\frac{a_0}{\varrho_0}\right)^3 du_0\Big] \\ \text{Argument von } U_1 \text{ und } U_2 \text{ ist } u_0 \end{cases}$$

$$(5)\quad \begin{cases} I' = +\frac{1}{1-e_0^2}\Big[U_1\int U_2'\,[w_0+e_0\sin w_0]\,du - U_2\int U_1'\,[w_0+e_0\sin w_0]\,du\Big] \quad {}^{1)} \\ \Delta = -\frac{1}{1-e_0^2}\Big[U_1\int\Big[U_2'\,\Phi\left(\frac{a}{\varrho}\right)^2+U_2\,\Omega\left(\frac{a}{\varrho}\right)^3\Big]du - U_2\int\Big[U_1'\,\Phi\left(\frac{a}{\varrho}\right)^2+U_1\,\Omega\left(\frac{a}{\varrho}\right)^3\Big]du\Big] \\ \text{Argument von } U_1 \text{ und } U_2 \text{ ist } u \end{cases}$$

Dazu tritt noch das Integral

$$(6)\qquad \Theta = \int\left(\frac{a}{\varrho}\right)^2\frac{a_0}{\varrho_0}\sin 2\,(w-w_0+\varphi)\,dw_0$$

---

[1]) Eliminiert man aus dem ursprünglichen Ausdruck für I' (S. 47) dw_0 mittels der Differentialbeziehung zwischen w_0 und u

$$dw_0 = \frac{n_0}{n}\sqrt{1-e_0^2}\left(\frac{a_0}{\varrho_0}\right)^2\frac{\varrho}{a}\,du$$

so folgt

$$I_0' = -\frac{n_0}{n}\sqrt{1-e_0^2}\Big[U_1\int U_2\frac{\varrho}{a}\left(\frac{a_0}{\varrho_0}\right)^3 du - U_2\int U_1\frac{\varrho}{a}\left(\frac{a_0}{\varrho_0}\right)^3 du\Big]$$

In den nachfolgenden Entwickelungen für $e_0 = 0$ ist diese Formel benutzt worden.

Aus diesen Größen setzen sich nun die Ausdrücke I und II gemäß den Gleichungen (15) in Nr. 14 wie folgt zusammen:

Für die Bewegung von S' um S:

$$(7)\quad \begin{cases} \mathrm{I} = -\dfrac{3}{4(1-e_0^2)}\left(\dfrac{a_0}{\varrho_0}\right)^2\left\{\dfrac{m_1}{m_2}\left(\dfrac{a_1}{a_0}\right)^2[\Gamma_{01}+\Delta_{01}]+\dfrac{m_3}{m_4}\left(\dfrac{a_2}{a_0}\right)^2[\Gamma_{02}+\Delta_{02}]\right\} \\ \mathrm{II} = +\dfrac{3}{2\sqrt{1-e_0^2}}\int\left\{\dfrac{m_1}{m_2}\left(\dfrac{a_1}{a_0}\right)^2\left[\left(\dfrac{a_0}{\varrho_0}\right)^3(\Gamma_{01}+\Delta_{01})+\dfrac{a_0}{\varrho_0}\Theta_1\right]+\dfrac{m_3}{m_4}\left(\dfrac{a_2}{a_0}\right)^2\left[\left(\dfrac{a_0}{\varrho_0}\right)^3(\Gamma_{02}+\Delta_{02})+\dfrac{a_0}{\varrho_0}\Theta_2\right]\right\}du_0 \end{cases}$$

Für A um S:

$$(7')\quad \begin{cases} \mathrm{I} = \dfrac{1}{2\sqrt{(1-e_0^2)(1-e_1^2)}}\,\dfrac{m_3+m_4}{m_1+m_2+m_3+m_4}\,\dfrac{n_0}{n_1}\left(\dfrac{a_1}{\varrho_1}\right)^2[\Gamma_1+3\Delta_1] \\ \mathrm{II} = -\dfrac{1}{\sqrt{1-e_0^2}}\,\dfrac{m_3+m_4}{m_1+m_2+m_3+m_4}\,\dfrac{n_0}{n_1}\int\left[\left(\dfrac{a_1}{\varrho_1}\right)^3(\Gamma_1+3\Delta_1)+\dfrac{3}{2}\,\dfrac{a_1}{\varrho_1}\Theta_1\right]du_1 \end{cases}$$

Für C um S':

$$(7'')\quad \begin{cases} \mathrm{I} = \dfrac{1}{2\sqrt{(1-e_0^2)(1-e_2^2)}}\,\dfrac{m_1+m_2}{m_1+m_2+m_3+m_4}\,\dfrac{n_0}{n_2}\left(\dfrac{a_2}{\varrho_2}\right)^2[\Gamma_2+3\Delta_2] \\ \mathrm{II} = -\dfrac{1}{\sqrt{1-e_0^2}}\,\dfrac{m_1+m_2}{m_1+m_2+m_3+m_4}\,\dfrac{n_0}{n_2}\int\left[\left(\dfrac{a_2}{\varrho_2}\right)^3(\Gamma_2+3\Delta_2)+\dfrac{3}{2}\,\dfrac{a_2}{\varrho_2}\Theta_2\right]du_2 \end{cases}$$

Die Funktionen (3) und (6) werden als Funktionen von u entwickelt und sind als solche endlich in Bezug auf die Exzentrizität e. An Stelle von w_0 wird ζ_0 eingeführt mittels Reihenentwickelung nach Potenzen von e_0. Man erhält so die in Nr. 16 angegebene allgemeine Form der Integrale. Als Entwickelungen nach e kommen die Reihen für $\frac{a}{\varrho}$, $\left(\frac{a}{\varrho}\right)^2$ und $\left(\frac{a}{\varrho}\right)^3$ vor und zwar in Δ und den Ausdrücken II in (7') und (7'').

Um die allgemeine Form der Entwickelungen kennen zu lernen, genügt es, die von e_0 unabhängigen Glieder zu untersuchen; es ist dies zugleich der für die Anwendung wichtigste Fall. Es sollen daher im folgenden nur die Störungen für $e_0 = 0$ entwickelt werden.

A. Entwickelung der Funktionen Φ, Ψ, Ω und Θ.

19. Zunächst sollen die Ausdrücke

$$\begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}(i\,u + i_0\,\zeta_0 + c)$$

und

$$\int \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}(i\,u + i_0\,\zeta_0 + c)\,d\,u$$

die in den folgenden Entwickelungen immer wiederkehren, als Funktionen von u entwickelt werden. c bedeutet eine Konstante, i und i_0 kleinere ganze, positive oder negative Zahlen. Die Integrale mit ζ_0 als Integrationsvariabeln lassen sich jedesmal leicht in die Integrale der obenstehenden Form überführen, sei es durch partielle Integration oder mittels der Relation

$$d\,\zeta_0 = \frac{n_0}{n}(1 - e\cos u)\,d\,u$$

Ebenso erledigt sich der Fall $i_0 = 0$ ohne Schwierigkeit.
Es ist

$$\zeta_0 = n_0\,(t - \tau_0) = \frac{n_0}{n}\,\zeta + \vartheta$$

$$= \frac{n_0}{n}\,u + \vartheta - \varepsilon\sin u$$

wenn

$$\varepsilon = e\,\frac{n_0}{n} \tag{8}$$

gesetzt wird. Setzt man ferner

$$\varepsilon' = i_0\,\varepsilon \quad ; \quad \vartheta' = i_0\,\vartheta + c$$

$$\nu = i_0\,\frac{n_0}{n}$$

so folgt

$$i\,u + i_0\,\zeta_0 + c = (i + \nu)\,u + \vartheta' - \varepsilon'\sin u$$

und also

$$\begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}(i\,u + i_0\,\zeta_0 + c) = \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}[(i + \nu)\,u + \vartheta']\cos(\varepsilon'\sin u)$$

$$\mp\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}[(i + \nu)\,u + \vartheta']\sin(\varepsilon'\sin u)$$

Setzt man hierin die bekannten Entwickelungen von $\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}(\varepsilon'\sin u)$ nach Besselschen Funktionen ein:

$$\cos(\varepsilon' \sin u) = J_0(\varepsilon') + 2J_2(\varepsilon')\cos 2u + 2J_4(\varepsilon')\cos 4u + \cdots$$
$$\sin(\varepsilon' \sin u) = \quad + 2J_1(\varepsilon')\sin u \quad + 2J_3(\varepsilon')\sin 3u + \cdots$$

so erhält man

$$\begin{aligned}\begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}(iu + i_0\zeta_0 + c) = \quad & J_0(\varepsilon')\begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}[(i+\nu)u + \vartheta'] \\ & + J_1(\varepsilon')\left[\begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}[(i-1+\nu)u + \vartheta'] - \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}[(i+1+\nu)u + \vartheta']\right] \\ & + J_2(\varepsilon')\left[\begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}[(i-2+\nu)u + \vartheta'] + \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}[(i+2+\nu)u + \vartheta']\right] \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\end{aligned}$$

Wegen der Beziehung

$$J_{-m}(\varepsilon') = (-1)^m J_m(\varepsilon')$$

läßt sich diese Entwickelung auch in der Form schreiben

$$(9)\qquad \begin{cases}\sin(iu + i_0\zeta_0 + c) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty}(-1)^{m-i}J^{(\varepsilon')}_{m-i}\sin[(\nu+m)u + \vartheta'] \\ \cos(iu + i_0\zeta_0 + c) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty}(-1)^{m-i}J^{(\varepsilon')}_{m-i}\cos[(\nu+m)u + \vartheta']\end{cases}$$

Ersetzt man i durch $-i$, so erhält man die analogen Formeln

$$(9')\qquad \begin{cases}\sin(iu - i_0\zeta_0 - c) = -\sum_{m=-\infty}^{+\infty}(-1)^{m+i}J^{(\varepsilon')}_{m+i}\sin[(\nu+m)u + \vartheta'] \\ \cos(iu - i_0\zeta_0 - c) = +\sum_{m=-\infty}^{+\infty}(-1)^{m+i}J^{(\varepsilon')}_{m+i}\cos[(\nu+m)u + \vartheta']\end{cases}$$

Den Fall $i_0 = 0$ schließen wir aus. Es ist dann ν ein echter Bruch und man kann über die Reihen (9) und (9') integrieren; es folgt:[1])

---

[1]) Die Integrale (10) sind von Hansen in der erwähnten Abhandlung zum ersten Male entwickelt worden. Da aber dort die Reihen nach dem Argument

$$(i \pm m)u + i_0\zeta_0 + c \qquad (m = 0, 1, 2 \ldots \infty)$$

fortschreiten, werden die Koeffizienten kompliziert; sie sind quadratisch in Bezug auf die Besselschen Funktionen.

Bei diesen sowie den im folgenden vorkommenden Reihen kann die Summations- und Integrationsfolge vertauscht werden, d. h. die Integrale (10) und (10') werden durch die Reihenentwickelungen auf der rechten Seite dieser Gleichungen dargestellt. Es folgt das aus der unbedingten Konvergenz dieser und der Reihen (9) und (9').

$$(10)\quad \begin{cases} \int \sin(iu + i_0\zeta_0 + c)\,du = -\sum_{m=-\infty}^{+\infty} (-1)^{m-i} \frac{1}{\nu+m} J^{(\varepsilon')}_{m-i} \cos[(\nu+m)u + \vartheta'] \\ \int \cos(iu + i_0\zeta_0 + c)\,du = +\sum_{m=-\infty}^{+\infty} (-1)^{m-i} \frac{1}{\nu+m} J^{(\varepsilon')}_{m-i} \sin[(\nu+m)u + \vartheta'] \end{cases}$$

und

$$(10')\quad \begin{cases} \int \sin(iu - i_0\zeta_0 - c)\,du = +\sum_{m=-\infty}^{+\infty} (-1)^{m+i} \frac{1}{\nu+m} J^{(\varepsilon')}_{m+i} \cos[(\nu+m)u + \vartheta'] \\ \int \cos(iu - i_0\zeta_0 - c)\,du = +\sum_{m=-\infty}^{+\infty} (-1)^{m+i} \frac{1}{\nu+m} J^{(\varepsilon')}_{m+i} \sin[(\nu+m)u + \vartheta'] \end{cases}$$

20. Es ist für $e_0 = 0$:

$$(11)\quad \begin{cases} \Phi = \frac{1}{2}\left(\frac{\varrho}{a}\right)^2 \sin 2(w - \zeta_0 + \varphi) \\ \Psi = \frac{1}{2}\left(\frac{\varrho}{a}\right)^2 \cos 2(w - \zeta_0 + \varphi) \\ \Omega = \sqrt{1-e^2} \int \frac{\partial}{\partial u}\left[\left(\frac{\varrho}{a}\right)^2 \cos 2(w - \zeta_0 + \varphi)\right] du \\ \Theta = \Psi - \frac{1}{2\sqrt{1-e^2}}\,\Omega \end{cases}$$

Wir setzen

$$(12)\quad \begin{cases} \left(\frac{\varrho}{a}\right)^2 \sin 2w = \sqrt{1-e^2}\,[-2e\sin u + \sin 2u] \qquad = f(u) \\ \left(\frac{\varrho}{a}\right)^2 \cos 2w = \frac{3}{2}e^2 - 2e\cos u + \left(1 - \frac{e^2}{2}\right)\cos 2u = g(u) \end{cases}$$

Die Ableitungen von f und g nach u lauten:

$$(13)\quad \begin{cases} f'(u) = 2\sqrt{1-e^2}\,[-e\cos u + \cos 2u] \\ g'(u) = 2\left[e\sin u - \left(1 - \frac{e^2}{2}\right)\sin 2u\right] \end{cases}$$

Für Φ, Ψ und Ω erhält man die folgenden Ausdrücke:

$$\Phi = \frac{1}{2}[f(u)\cos 2(\zeta_0 - \varphi) - g(u)\sin 2(\zeta_0 - \varphi)]$$

$$\Psi = \frac{1}{2}[f(u)\sin 2(\zeta_0 - \varphi) + g(u)\cos 2(\zeta_0 - \varphi)]$$

$$\Omega = \sqrt{1-e^2}\int [f'(u)\sin 2(\zeta_0 - \varphi) + g'(u)\cos 2(\zeta_0 - \varphi)]\,du$$

oder mit Rücksicht auf (12) und (13)

$$\Phi = -\frac{3}{4}e^2\sin(2\zeta_0-2\varphi)+\frac{e}{2}(1-\sqrt{1-e^2})\sin(u+2\zeta_0-2\varphi)-\frac{e}{2}(1+\sqrt{1-e^2})\sin(u-2\zeta_0+2\varphi)$$
$$-\frac{1}{4}\left(1-\frac{e^2}{2}-\sqrt{1-e^2}\right)\sin(2u+2\zeta_0-2\varphi)+\frac{1}{4}\left(1-\frac{e^2}{2}+\sqrt{1-e^2}\right)\sin(2u-2\zeta_0+2\varphi)$$

$$\Psi = +\frac{3}{4}e^2\cos(2\zeta_0-2\varphi)-\frac{e}{2}(1-\sqrt{1-e^2})\cos(u+2\zeta_0-2\varphi)-\frac{e}{2}(1+\sqrt{1-e^2})\cos(u-2\zeta_0+2\varphi)$$
$$+\frac{1}{4}\left(1-\frac{e^2}{2}-\sqrt{1-e^2}\right)\cos(2u+2\zeta_0-2\varphi)+\frac{1}{4}\left(1-\frac{e^2}{2}+\sqrt{1-e^2}\right)\cos(2u-2\zeta_0+2\varphi)$$

$$\Omega = \sqrt{1-e^2}\int\Omega'\,du$$

$$\Omega' = e(1-\sqrt{1-e^2})\sin(u+2\zeta_0-2\varphi)+e(1+\sqrt{1-e^2})\sin(u-2\zeta_0+2\varphi)$$
$$-\left(1-\frac{e^2}{2}-\sqrt{1-e^2}\right)\sin(2u+2\zeta_0-2\varphi)-\left(1-\frac{e^2}{2}+\sqrt{1-e^2}\right)\sin(2u-2\zeta_0+2\varphi)$$

Setzt man in diese Ausdrücke die Entwickelungen (9), (9′) und (10), (10′) ein, so erhält man für Φ, Ψ, Ω und Θ die folgenden Reihen:

(14)
$$\begin{cases} \Phi = & -\sum_{m=-\infty}^{+\infty}(-1)^m P_m \sin[(\nu+m)u+\vartheta'] \\ \Psi = & +\sum_{m=-\infty}^{+\infty}(-1)^m P_m \cos[(\nu+m)u+\vartheta'] \\ \Omega = \sqrt{1-e^2} & \sum_{m=-\infty}^{+\infty}(-1)^m \frac{Q_m}{\nu+m}\cos[(\nu+m)u+\vartheta'] \\ \Theta = & +\sum_{m=-\infty}^{+\infty}(-1)^m \frac{K_m}{\nu+m}\cos[(\nu+m)u+\vartheta'] \end{cases}$$

Die Koeffizienten P_m, Q_m, K_m haben die folgende Bedeutung:

(15)
$$\begin{cases} P_m = \frac{3}{4}e^2 J_m^{(\varepsilon)} + \frac{e}{2}(1-\sqrt{1-e^2})J_{m-1}^{(\varepsilon)} + \frac{e}{2}(1+\sqrt{1-e^2})J_{m+1}^{(\varepsilon)} \\ \qquad + \frac{1}{4}\left(1-\frac{e^2}{2}-\sqrt{1-e^2}\right)J_{m-2}^{(\varepsilon)} + \frac{1}{4}\left(1-\frac{e^2}{2}+\sqrt{1-e^2}\right)J_{m+2}^{(\varepsilon)} \\ Q_m = + e(1-\sqrt{1-e^2})J_{m-1}^{(\varepsilon)} - e(1+\sqrt{1-e^2})J_{m+1}^{(\varepsilon)} \\ \qquad + \left(1-\frac{e^2}{2}-\sqrt{1-e^2}\right)J_{m-2}^{(\varepsilon)} - \left(1-\frac{e^2}{2}+\sqrt{1-e^2}\right)J_{m+2}^{(\varepsilon)} \\ K_m = (\nu+m)P_m - \frac{1}{2}Q_m \\ \varepsilon' = 2e\frac{n_0}{n} \quad ; \quad \vartheta' = 2(\vartheta-\varphi) \quad ; \quad \nu = 2\frac{n_0}{n} \end{cases}$$

B. Die Störungen von S' gegen S.

21. Es ist

$$(16)\quad \begin{cases} \Gamma_0 = \sin\zeta_0 \int \left(\frac{\varrho}{a}\right)^2 \cos\zeta_0\, d\zeta_0 - \cos\zeta_0 \int \left(\frac{\varrho}{a}\right)^2 \sin\zeta_0\, d\zeta_0 \\ \Delta_0 = \frac{2}{\sqrt{1-e^2}}\left[\sin\zeta_0 \int [\sqrt{1-e^2}\,\Psi + \Omega]\cos\zeta_0\, d\zeta_0 - \cos\zeta_0 \int [\sqrt{1-e^2}\,\Psi + \Omega]\sin\zeta_0\, d\zeta_0\right] \end{cases}$$

Partielle Integration ergibt für Γ_0:

$$\Gamma_0 = \left(\frac{\varrho}{a}\right)^2 - 2\left[\sin\zeta_0 \int \sin\zeta_0 \frac{\varrho}{a}\, d\left(\frac{\varrho}{a}\right) + \cos\zeta_0 \int \cos\zeta_0 \frac{\varrho}{a}\, d\left(\frac{\varrho}{a}\right)\right]$$

oder wegen

$$\frac{\varrho}{a}\, d\left(\frac{\varrho}{a}\right) = \left[e\sin u - \frac{e^2}{2}\sin 2u\right] du$$

$$(17)\quad \begin{cases} \Gamma_0 = \left(\frac{\varrho}{a}\right)^2 - e\,\gamma_0' + \frac{1}{2}\,e^2\,\gamma_0'' \\ \gamma_0' = 2\,[\sin\zeta_0 \int \sin\zeta_0 \sin u\, du + \cos\zeta_0 \int \cos\zeta_0 \sin u\, du] \\ \gamma_0'' = 2\,[\sin\zeta_0 \int \sin\zeta_0 \sin 2u\, du + \cos\zeta_0 \int \cos\zeta_0 \sin 2u\, du] \end{cases}$$

Wir entwickeln die allgemeine Form der Integrale; aus dieser können dann in jedem Fall leicht die zur Anwendung bestimmten genäherten Formeln hergestellt werden. γ_0' und γ_0'' sind enthalten in dem Ausdruck

$$\gamma_0 = 2\,[\sin\zeta_0 \int \sin\zeta_0 \sin iu\, du + \cos\zeta_0 \int \cos\zeta_0 \sin iu\, du]$$

Es folgt nach den Formeln (10) und (10'):

$$\gamma_0 = +\sin\zeta_0 \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (-1)^{k+i} \frac{1}{\nu+k}\,[J_{k+i}^{(\varepsilon)} - J_{k-i}^{(\varepsilon)}] \sin[(\nu+k)u + \vartheta]$$

$$+\cos\zeta_0 \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (-1)^{k+i} \frac{1}{\nu+k}\,[J_{k+i}^{(\varepsilon)} - J_{k-i}^{(\varepsilon)}] \cos[(\nu+k)u + \vartheta]$$

$$\nu = \frac{n_0}{n}$$

oder

$$(17')\quad \gamma_0 = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (-1)^{i+k} \frac{1}{\frac{n_0}{n}+k}\,[J_{k+i}^{(\varepsilon)} - J_{k-i}^{(\varepsilon)}] \cos\left[\left(\frac{n_0}{n}+k\right)u - \zeta_0 + \vartheta\right]$$

Das Argument des Kosinusses läßt sich wegen

$$\frac{n_0}{n} u + \vartheta - \zeta_0 = \varepsilon \sin u$$

auch in der Form schreiben

$$k u + \varepsilon \sin u$$

so daß man für den Kosinus die Entwickelung erhält

$$\cos [k u + \varepsilon \sin u] = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} J_l(\varepsilon) \cos (k + l) u$$

Somit enthält die Entwickelung (17') konstante Glieder. Dies gilt aber nur von der Darstellung von γ_0 als Funktion von u; als Funktion der Zeit ist γ_0 von solchen Gliedern frei, so daß das Integral über $\gamma_0 \, d\zeta_0$, welches zur Bildung des Störungsausdruckes II erforderlich ist, kein säkulares Glied enthält.

Statt $d\zeta_0$ führen wir du ein mittels der Relation

$$d\zeta_0 = \frac{n_0}{n} \frac{\varrho}{a} \, du$$

und erhalten

$$\int [\cos k u + \varepsilon \sin u] \, d\zeta_0 = \frac{n_0}{n} \int \Big[\cos [k u + \varepsilon \sin u] - \frac{e}{2} \cos [(k-1) u + \varepsilon \sin u] - \frac{e}{2} \cos [(k+1) u + \varepsilon \sin u] \Big] du$$

Setzt man nun für die Glieder unter dem Integralzeichen die angegebene Reihenentwickelung ein, so lautet der Koeffizient der neuen Reihe

$$J_l^{(\varepsilon)} - \frac{e}{2} [J_{l-1}^{(\varepsilon)} + J_{l+1}^{(\varepsilon)}] = \left(1 - l \frac{n}{n_0}\right) J_l^{(\varepsilon)} \; ^{1})$$

Die Integration ergibt:

$$\int \cos [k u + \varepsilon \sin u] \, d\zeta_0 = \left(\frac{n_0}{n} + k\right) J_{-k}^{(\varepsilon)} \cdot u + \sum_{l=-\infty}^{+\infty}{}' \left(\frac{n_0}{n} - l\right) \frac{J_l^{(\varepsilon)}}{k+l} \sin (k + l) u$$

wobei Σ' bedeutet, daß das Glied $l = -k$ ausfällt.

Das säkuläre Glied, das aus $\int \gamma_0 \, d\zeta_0$ entsteht, lautet somit

$$(-1)^i \cdot u \sum_{k=-\infty}^{+\infty} J_k^{(\varepsilon)} [J_{k+i}^{(\varepsilon)} - J_{k-i}^{(\varepsilon)}] = 0$$

---

[1]) Zu dieser Umformung dient die Relation

$$k J_k^{(x)} = \frac{x}{2} [J_{k+1}^{(x)} + J_{k-1}^{(x)}]$$

Vgl. Tisserand: Méc. cél. Bd. I S. 209.

Die Entwickelung von Δ_0 gestaltet sich ganz analog der von I_0'. Durch partielle Integration wird $d\zeta_0$ durch du ersetzt; es folgt

$$\Delta_0 = \frac{2}{\sqrt{1-e^2}}[\sqrt{1-e^2}\,\Psi + \Omega]$$

$$- \frac{2}{\sqrt{1-e^2}}\left[\sin\zeta_0 \int \sin\zeta_0 \frac{d}{du}[\sqrt{1-e^2}\,\Psi + \Omega]\,du + \cos\zeta_0 \int \cos\zeta_0 \frac{d}{du}[\sqrt{1-e^2}\,\Psi + \Omega]\,du\right]$$

oder durch Einsetzen der Reihen für Ψ und Ω:

$$(18)\quad \begin{cases} \Delta_0 = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} (-1)^m \left[\left(2\frac{n_0}{n} + m\right) P_m + Q_m\right] \left\{ \frac{2}{2\frac{n_0}{n} + m} \cos\left[\left(2\frac{n_0}{n} + m\right) u + 2\vartheta - 2\varphi\right] + \delta_0^{(m)} \right\} \\ \delta_0^{(m)} = 2\left[\sin\zeta_0 \int \sin\zeta_0 \sin\left[\left(2\frac{n_0}{n} + m\right) u + 2\vartheta - 2\varphi\right] du + \cos\zeta_0 \int \cos\zeta_0 \sin\left[\left(2\frac{n_0}{n} + m\right) u + 2\vartheta - 2\varphi\right] du\right] \end{cases}$$

$\delta_0^{(m)}$ wird ebenso entwickelt wie γ_0; nur tritt an Stelle der ganzen Zahl i die gebrochene Zahl $m + 2\frac{n_0}{n}$, so daß man in den Formeln (10) ν um $2\frac{n_0}{n}$ zu vergrößern hat. Für i_0 kommen die Werte $+1$ und -1 in Betracht; man erhält für $\delta_0^{(m)}$ die Entwickelung:

$$(18')\quad \begin{cases} \delta_0^{(m)} = -\sum_{k=-\infty}^{+\infty} (-1)^{m-k} \frac{J_{m-k}^{(\varepsilon)}}{\frac{n_0}{n} + k} \cos\left[\left(\frac{n_0}{n} + k\right) u + \zeta_0 + \vartheta - 2\varphi\right] \\ \qquad\qquad -\sum_{k=-\infty}^{+\infty} (-1)^{m-k} \frac{J_{m-k}^{(3\varepsilon)}}{3\frac{n_0}{n} + k} \cos\left[\left(3\frac{n_0}{n} + k\right) u - \zeta_0 + 3\vartheta - 2\varphi\right] \end{cases}$$

Bei der Integration über $\Delta_0\, d\zeta_0$ kann kein säkulares Glied auftreten. Die in (18) und (18') vorkommenden Argumente lauten

$$\left(i\frac{n_0}{n} + k\right) u + (2 - i)\,\zeta_0 + i\,\vartheta - 2\varphi = 2\zeta_0 - 2\varphi + ku + i\varepsilon\sin u$$

$$(i = 1, 2, 3)$$

Setzt man $i\varepsilon$ gleich ε', so hat man die Entwickelungen

$$\begin{matrix}\sin \\ \cos\end{matrix}(2\zeta_0 - 2\varphi + ku + \varepsilon'\sin u) = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} J_l^{(\varepsilon')} \begin{matrix}\sin \\ \cos\end{matrix}[(k + l)\,u + 2\zeta_0 - 2\varphi]$$

Durch Anwendung partieller Integration folgt aus diesen Formeln:

$$\int \cos(2\zeta_0 - 2\varphi + ku + \varepsilon' \sin u)\, d\zeta_0 = \frac{1}{2} \sin(2\zeta_0 - 2\varphi + ku + \varepsilon' \sin u)$$
$$- \frac{1}{2} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} (k+l)\, J_l^{(\varepsilon')} \int \cos[(k+l)\, u + 2\zeta_0 - 2\varphi]\, du$$

Die letzteren Integrale ergeben sich aus den Formeln (10).

Nach diesen allgemeinen Entwickelungen lassen sich leicht genäherte Ausdrücke für die Störungen aufstellen. Da in diesen die Funktionen I_0 und Δ_0 mit $\left(\frac{a_1}{a_0}\right)^2$ resp. $\left(\frac{a_2}{a_0}\right)^2$ multipliziert sind, werden die mit $\frac{n_0}{n}$ und Potenzen dieser Größe multiplizierten Glieder, soweit sie nicht säkular sind, vernachlässigt.

Es folgt:

$$I_0 = 1 + \frac{3}{2} e^2 \quad ; \quad \int I_0\, d\zeta_0 = \left(1 + \frac{3}{2} e^2\right) \zeta_0$$

$$\Delta_0 = -\frac{17}{6} e^2 \cos(2\zeta_0 - 2\varphi) \qquad \int \Delta_0\, d\zeta_0 = -\frac{17}{12} e^2 \sin(2\zeta_0 - 2\varphi)$$

$$\Theta = +\frac{5}{4} e^2 \cos(2\zeta_0 - 2\varphi) \qquad \int \Theta\, d\zeta_0 = +\frac{5}{8} e^2 \sin(2\zeta_0 - 2\varphi)$$

und somit:

(19)
$$\begin{cases} \mathrm{I} = -\frac{3}{4} \frac{m_1}{m_2} \left(\frac{a_1}{a_0}\right)^2 \left[1 + \frac{3}{2} e_1^2 - \frac{17}{6} e_1^2 \cos(2\zeta_0 - 2\varphi_1)\right] \\ \qquad\quad - \frac{3}{4} \frac{m_3}{m_4} \left(\frac{a_2}{a_0}\right)^2 \left[1 + \frac{3}{2} e_2^2 - \frac{17}{6} e_2^2 \cos(2\zeta_0 - 2\varphi_2)\right] \\ \mathrm{II} = +\frac{3}{2} \frac{m_1}{m_2} \left(\frac{a_1}{a_0}\right)^2 \left[\left(1 + \frac{3}{2} e_1^2\right) \zeta_0 - \frac{19}{24} e_1^2 \sin(2\zeta_0 - 2\varphi_1)\right] \\ \qquad\quad + \frac{3}{2} \frac{m_3}{m_4} \left(\frac{a_2}{a_0}\right)^2 \left[\left(1 + \frac{3}{2} e_2^2\right) \zeta_0 - \frac{19}{24} e_2^2 \sin(2\zeta_0 - 2\varphi_2)\right] \end{cases}$$

C. Die Störungen von A gegen S und von C gegen S'.

22. Zunächst entwickeln wir die Reihen für die Potenzen von $\frac{a}{\varrho}$, die in diesen Störungen vorkommen.

Wir gehen aus von der Reihenentwickelung für die wahre Anomalie als Funktion der exzentrischen:

$$w = u + 2\left[\frac{e}{1+\sqrt{1-e^2}}\sin u + \frac{1}{2}\left(\frac{e}{1+\sqrt{1-e^2}}\right)^2 \sin 2u + \frac{1}{3}\left(\frac{e}{1+\sqrt{1-e^2}}\right)^3 \sin 3u + \cdots\right]^{1)}$$

Aus dieser Formel erhält man die Entwickelung $\frac{a}{\varrho}$ nach der Relation

$$\frac{a}{\varrho} = \frac{1}{\sqrt{1-e^2}}\frac{dw}{du}$$

Es folgt

$$\frac{a}{\varrho} = \frac{2}{\sqrt{1-e^2}}\left[\frac{1}{2} + \alpha\cos u + \alpha^2 \cos 2u + \cdots\right]$$

wobei zur Abkürzung gesetzt wurde:

$$\alpha = \frac{e}{1+\sqrt{1-e^2}} \tag{20}$$

Die Entwickelung von $\frac{a}{\varrho}$ schreiben wir in der Form:

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\sqrt{1-e^2}\,\frac{a}{\varrho} = \frac{1}{2}A_0 + A_1\cos u + A_2\cos 2u + \cdots \\ A_k = \alpha^k \qquad (k = 0, 1, 2 \ldots) \end{cases} \tag{21}$$

Es ist klar, daß auch die Potenzen von $\frac{a}{\varrho}$ nur Kosinusreihen sein können; wir setzen daher

$$\frac{1}{2}\sqrt{1-e^2}\left(\frac{a}{\varrho}\right)^2 = \frac{1}{2}B_0 + B_1\cos u + B_2\cos 2u + \cdots$$

$$\frac{1}{2}\sqrt{1-e^2}\left(\frac{a}{\varrho}\right)^3 = \frac{1}{2}C_0 + C_1\cos u + C_2\cos 2u + \cdots$$

Die Koeffizienten B erhält man mit Hilfe der bekannten Größen A mittels Rekursionsformeln und in analoger Weise die Größen C aus den B. Zur Ab-

---

[1]) Vgl. Tisserand: Méc. cél. Bd. I S. 222.

kürzung bezeichnen wir die drei Reihen mit den Buchstaben A, B und C; es ist dann

$$A = B\frac{\varrho}{a} = B(1 - e\cos u)$$

$$B = C\frac{\varrho}{a} = C(1 - e\cos u)$$

Zwischen den Koeffizienten der Reihen A und B und B und C bestehen somit die folgenden Relationen, die man erhält, wenn man die Multiplikation mit $(1 - e\cos u)$ ausführt und die Koeffizienten gleicher Glieder auf beiden Seiten gleichsetzt:

(a)
$$\begin{cases} A_0 = B_0 - e\,B_1 \\ A_k = B_k - \frac{e}{2}(B_{k-1} + B_{k+1}) \qquad (k = 1, 2, 3 \ldots.) \\ B_0 = C_0 - e\,C_1 \\ B_k = C_k - \frac{e}{2}(C_{k-1} + C_{k+1}) \qquad (k = 1, 2, 3 \ldots.) \end{cases}$$

Außer diesen Formeln lassen sich noch andere aufstellen, wenn man von der Darstellung der Koeffizienten durch bestimmte Integrale ausgeht. Es soll dies geschehen, einerseits um auch die Größen B_0 und C_0, die in den Formeln (a) unbestimmt bleiben, in einfacher Weise zu erhalten; andererseits werden auch die Rekursionsformeln noch etwas einfacher. Es ist

$$A_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} A\cos k\,u\,du$$

Unter Ausschluß des Wertes $k = 0$ folgt hieraus durch partielle Integration

$$\pi A_k = \left[\frac{1}{k}A\sin k\,u\right]_0^{2\pi} + \frac{e}{k}\int_0^{2\pi} B\sin k\,u\sin u\,du$$

da

$$\frac{dA}{du} = -Be\sin u$$

Das Glied außerhalb des Integralzeichens ist gleich 0; löst man das Produkt $\sin u\sin k\,u$ in eine Summe auf, so folgt

(b)
$$k\,A_k = \frac{e}{2}(B_{k-1} - B_{k+1}) \qquad (k = 1, 2, 3 \ldots.)$$

In analoger Weise ergibt sich für die Koeffizienten der Reihen B und C:

$$B_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} B \cos k u \, du$$

$$\pi B_k = \left[\frac{1}{k} B \sin k u\right]_0^{2\pi} + \frac{2e}{k}\int_0^{2\pi} C \sin k u \sin u \, du$$

da

$$\frac{dB}{du} = -2Ce\sin u$$

und somit

(c) $$k B_k = e\,(C_{k-1} - C_{k+1}) \qquad (k = 1, 2, 3 \ldots.)$$

Aus diesen und den Gleichungen (a) erhält man folgende Relationen:

$$(k-1)\,A_k = -B_k + e\,B_{k-1}$$
$$(k-2)\,B_k = -2\,C_k + 2e\,C_{k-1}$$

Setzt man $k = 1$, so erhält man aus diesen Gleichungen in Verbindung mit der ersten und dritten Gleichung (a) B_0, B_1, C_0, C_1. Es folgt:

$$B_1 - e\,B_0 = 0 \quad ; \quad 2\,C_1 - 2e\,C_0 = B_1$$
$$e\,B_1 - B_0 = -A_0 \qquad e\,C_1 - C_0 = -B_0$$
$$B_0 = \frac{1}{1-e^2}A_0 \quad ; \quad C_0 = \frac{1}{1-e^2}\left(B_0 + \frac{e}{2}B_1\right)$$
$$B_1 = \frac{e}{1-e^2}A_0 \qquad C_1 = \frac{1}{1-e^2}\left(e\,B_0 + \frac{1}{2}B_1\right)$$

Man erhält somit für die zweite und dritte Potenz von $\frac{a}{\varrho}$ die folgenden Reihenentwickelungen:

(22)
$$\begin{cases} \frac{1}{2}\sqrt{1-e^2}\left(\frac{a}{\varrho}\right)^2 = \frac{1}{2}B_0 + B_1\cos u + B_2\cos 2u + \cdots \\ \qquad B_0 = \frac{1}{1-e^2} \\ \qquad B_k = e\,B_{k-1} - (k-1)\,A_k \qquad (k = 1, 2, 3 \ldots.) \\ \frac{1}{2}\sqrt{1-e^2}\left(\frac{a}{\varrho}\right)^3 = \frac{1}{2}C_0 + C_1\cos u + C_2\cos 2u + \cdots \\ \qquad C_0 = \frac{1}{(1-e^2)^2}\left(1 + \frac{e^2}{2}\right) \\ \qquad C_k = e\,C_{k-1} - \frac{k-2}{2}B_k \qquad (k = 1, 2, 3 \ldots.) \end{cases}$$

Die Entwickelung der höheren Potenzen von $\frac{a}{\varrho}$ geschieht in entsprechender Weise.

23. Wir gehen zur Entwickelung der Funktionen I' und Δ über. Es ist:

$$(23)\quad \begin{cases} I' = -\frac{n_0}{n}\left[U_1 \int U_2 \frac{\varrho}{a}\, du - U_2 \int U_1 \frac{\varrho}{a}\, du\right] \\ \Delta = -U_1 \int \left[U_2' \Phi\left(\frac{a}{\varrho}\right)^2 + U_2 \Omega\left(\frac{a}{\varrho}\right)^3\right] du + U_2 \int \left[U_1' \Phi\left(\frac{a}{\varrho}\right)^2 + U_1 \Omega\left(\frac{a}{\varrho}\right)^3\right] du \end{cases}$$

Setzt man in I' die Ausdrücke für U_1 und U_2 ein, so folgt:

$$\begin{aligned} \frac{n_0}{n}\frac{1}{\sqrt{1-e^2}} I' = {} & 3e\left(1+\frac{e^2}{2}\right)\left[\int \frac{\varrho}{a}\sin u\, du - \sin u \int \frac{\varrho}{a}\, du\right] \\ & -(1+3e^2)\left[\cos u \int \frac{\varrho}{a}\sin u\, du - \sin u \int \frac{\varrho}{a}\cos u\, du\right] \\ & -\frac{e^3}{2}\left[\cos 2u \int \frac{\varrho}{a}\sin u\, du - \sin u \int \frac{\varrho}{a}\cos 2u\, du\right] \\ & -3e^2 \sin u \int du \int \frac{\varrho}{a}\sin u\, du \end{aligned}$$

Die Auswertung der einzelnen Integrale macht keine Schwierigkeit; der schließliche Ausdruck für I' lautet:

$$\begin{aligned} I' = \sqrt{1-e^2}\,\frac{n_0}{n}\Big[1 + 6e^2 + \frac{9}{16}e^4 - \left(\frac{13}{4}e + \frac{33}{16}e^3\right)\cos u - \left(\frac{9}{4}e^2 + \frac{7}{24}e^4\right)\cos 2u \\ + \frac{5}{16}e^3 \cos 3u - \frac{e^4}{48}\cos 4u - \left(\frac{7}{2}e + 3e^3\right) u \sin u\Big] \end{aligned}$$

Dieser Teil der Störungen enthält diejenigen Glieder, in deren Argument das Verhältnis $\frac{n_0}{n}$ — d. h. also die mittlere Anomalie ζ_0 — nicht vorkommt und gehört daher mit denjenigen Gliedern zusammen, die die partikulären Lösungen $z_1 \ldots . z_4$ liefern und die mit den willkürlichen Konstanten $c_1 \ldots . c_4$ multipliziert sind.

In Bezug auf die Exzentrizität ist I' endlich.

Das aus I' hervorgehende säkulare Glied in dem Störungsausdruck I lautet

$$-\left(\frac{7}{4}e + \frac{3}{2}e^2\right)\frac{m_3+m_4}{m_1+m_2+m_3+m_4}\left(\frac{n_0}{n}\right)^2\left(\frac{a}{\varrho}\right)^2 u \sin u$$

Sowohl dieses und das entsprechende Glied in dem Ausdruck II als auch ein weiteres säkulares Glied in II ohne periodischen Koeffizienten können durch entsprechende Bestimmung der Konstanten kompensiert werden.

Der Ausdruck für z_3 lautet ausführlich geschrieben:

$$z_3 = -(1-e^2)\left(\frac{a}{\varrho}\right)^2\left\{3e\left(1+\frac{e^2}{2}\right)\left[\sin u\int\left(\frac{a}{\varrho}\right)^3 du - \int\left(\frac{a}{\varrho}\right)^3 \sin u\, du\right]\right.$$
$$-(1+3e^2)\left[\sin u\int\left(\frac{a}{\varrho}\right)^3\cos u\, du - \cos u\int\left(\frac{a}{\varrho}\right)^3\sin u\, du\right]$$
$$-\frac{e^3}{2}\left[\sin u\int\left(\frac{a}{\varrho}\right)^3\cos 2u\, du - \cos 2u\int\left(\frac{a}{\varrho}\right)^3\sin u\, du\right]$$
$$\left.+3e^2\sin u\int du\int\left(\frac{a}{\varrho}\right)^3\sin u\, du\right\}$$

z_3 setzt sich somit zusammen aus einer Kosinusreihe, die nach Vielfachen von u fortschreitet, und dem folgenden säkularen Glied:

$$\sqrt{1-e^2}\left[3e\left(1+\frac{e^2}{2}\right)C_0 - (1+3e^2)C_1 - \frac{e^3}{2}C_2\right]\left(\frac{a}{\varrho}\right)^2 u\sin u$$

Multipliziert wird dieses Glied mit der Konstanten c_3.
Aus z_2 kommt das Glied

$$-3e^2\left(\frac{a}{\varrho}\right)^2 u\sin u$$

hinzu, mit c_2 multipliziert. Indem c_2 noch unbestimmt bleibt, soll c_3 so bestimmt werden, daß sich diese sämtlichen Glieder gegenseitig aufheben. Der Rest enthält dann noch eine Sinus-[1]) und eine Kosinusreihe nach Vielfachen von u. Daraus entsteht in der Störung der wahren Anomalie ein säkulares Glied von der Form

$$u \times \text{constans}$$

zu dem noch das Glied $\frac{1}{2}c_3 u$ hinzutritt. Da der konstante Koeffizient c_2 enthält, kann man diese Größe so bestimmen, daß auch dieses Störungsglied verschwindet. Bei dieser Konstantenbestimmung werden c_2 und c_3 Größen von der Ordnung $\left(\frac{n_0}{n}\right)^2$.

Es wird sich zeigen, daß aus Δ und Θ weder in dem Störungsausdruck I noch II ein säkulares Glied entstehen kann.

Es folgt somit, daß innerhalb der hier erstrebten Näherung die Störung des Radius Vektor sowie der wahren Anomalie frei von säkularen Gliedern sowohl mit als auch ohne periodische Koeffizienten ist.

---

[1]) Die Sinusreihe folgt aus z_1; sie kann durch 0-setzen von c_1 vermieden werden.

24. In den Ausdruck für Δ setzen wir für Φ und Ω ihre Reihenentwickelungen ein (Gl. 14 in Nr. 20) und schreiben Δ in der Form:

$$\Delta = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} (-1)^m \left\{ P_m \Phi'_m - \sqrt{1-e^2}\, \frac{Q_m}{\nu+m}\, \Omega_m \right\}$$

Φ'_m und Ω haben die folgende Bedeutung:

$$\Phi'_m = U_1 \int U_2 \left(\frac{a}{\varrho}\right)^2 \sin[(\nu+m)u+\vartheta']\,du - U_2 \int U_1 \left(\frac{a}{\varrho}\right)^2 \sin[(\nu+m)u+\vartheta']\,du$$

$$\Omega_m = U_1 \int U_2 \left(\frac{a}{\varrho}\right)^3 \cos[(\nu+m)u+\vartheta']\,du - U_2 \int U_1 \left(\frac{a}{\varrho}\right)^3 \cos[(\nu+m)u+\vartheta']\,du$$

Φ'_m wird durch partielle Integration zu dem folgenden Ausdruck umgeformt:

$$\Phi'_m = -(\nu+m)\left[U_1 \int U_2 \left(\frac{a}{\varrho}\right)^2 \cos[(\nu+m)u+\vartheta']\,du - U_2 \int U_1 \left(\frac{a}{\varrho}\right)^2 \cos[(\nu+m)u+\vartheta']\,du \right]$$

$$+ 2e\left[U_1 \int U_2 \left(\frac{a}{\varrho}\right)^3 \sin u \sin[(\nu+m)u+\vartheta']\,du \right.$$

$$\left. - U_2 \int U_1 \left(\frac{a}{\varrho}\right)^3 \sin u \sin[(\nu+m)u+\vartheta']\,du \right]$$

Den Klammerausdruck der ersten Zeile bezeichnen wir mit Φ_m; der der zweiten läßt sich einfach durch Ω_{m-1} und Ω_{m+1} darstellen; es ist

$$\Phi'_m = -(\nu+m)\,\Phi_m - e\,[\Omega_{m+1} - \Omega_{m-1}]$$

Somit erhält man für Δ diese Darstellung:

$$(26)\quad \begin{cases} \Delta = -\sum_{m=-\infty}^{+\infty} (-1)^m \left\{ (\nu+m) P_m \Phi_m - \left[e(P_{m-1} - P_{m+1}) - \sqrt{1-e^2}\, \frac{Q_m}{\nu+m} \right] \Omega_m \right\} \\ \Phi_m = U_1 \int U_2 \left(\frac{a}{\varrho}\right)^2 \cos[(\nu+m)u+\vartheta']\,du - U_2 \int U_1 \left(\frac{a}{\varrho}\right)^2 \cos[(\nu+m)u+\vartheta']\,du \\ \Omega_m = U_1 \int U_2 \left(\frac{a}{\varrho}\right)^3 \cos[(\nu+m)u+\vartheta']\,du - U_2 \int U_1 \left(\frac{a}{\varrho}\right)^3 \cos[(\nu+m)u+\vartheta']\,du \\ \vartheta' = 2(\vartheta - \varphi) \quad ; \quad \nu = 2\frac{n_0}{n} \end{cases}$$

Ausführlich geschrieben lautet der Ausdruck für Φ_m:

$$(26')\quad \begin{cases} \Phi_m = 6e\left(1+\frac{e^2}{2}\right)\left[\sin u \int B\cos[(\nu+m)u+\vartheta']\,du - \int B\sin u\cos[(\nu+m)u+\vartheta']\,du\right] \\ \quad -2(1+3e^2)\left[\sin u\int B\cos u\cos[(\nu+m)u+\vartheta']\,du - \cos u\int B\sin u\cos[(\nu+m)u+\vartheta']\,du\right] \\ \quad -e^3\left[\sin u\int B\cos 2u\cos[(\nu+m)u+\vartheta']\,du - \cos 2u\int B\sin u\cos[(\nu+m)u+\vartheta']\,du\right] \\ \quad +6e^2\sin u\int du\int B\sin u\cos[(\nu+m)u+\vartheta']\,du \end{cases}$$

B bedeutet wie früher die Reihe für $\frac{1}{2}\sqrt{1-e^2}\left(\frac{a}{\varrho}\right)^2$. Man erhält Ω_m, indem man für B die Reihe C in (26') einsetzt. Die Entwickelung der obigen Ausdrücke erfordert folgende Integrationen:

$$(27)\quad \begin{cases} s_m = 2\int B\sin[(\nu+m)u+\vartheta']\,du \\ c_m = 2\int B\cos[(\nu+m)u+\vartheta']\,du \end{cases}$$

Es ist

$$2B\sin[(\nu+m)u+\vartheta'] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} B_k \sin[(\nu+m+k)u+\vartheta']$$

$$2B\cos[(\nu+m)u+\vartheta'] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} B_k \cos[(\nu+m+k)u+\vartheta']$$

wobei B_{-k} gleich B_{+k} zu setzen ist. Für s_m und c_m ergeben sich somit die Entwickelungen:

$$(28)\quad \begin{cases} s_m = -\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{B_k}{\nu+m+k}\cos[(\nu+m+k)u+\vartheta'] \\ c_m = +\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{B_k}{\nu+m+k}\sin[(\nu+m+k)u+\vartheta'] \\ B_{-k} = B_{+k} \end{cases}$$

Um die Störungen der wahren Anomalie zu erhalten, hat man die gleichen Integrationen auszuführen.

Die nachfolgenden Näherungsformeln enthalten alle Glieder bis $e\left(\frac{n_0}{n}\right)^2$ und $e^2\frac{n_0}{n}$; für abschätzungsweise Betrachtungen dürfte diese Genauigkeit ausreichen.[1]) Es ist:

$$\begin{aligned}
\Delta = &-\frac{5}{4}e^2\left(1+\frac{63}{20}\nu\right)\cos[\nu u+\vartheta'] \\
&-\frac{1}{4}e\left(5+\frac{9}{4}\nu\right)\cos[(\nu-1)u+\vartheta'] \\
&-\frac{1}{3}\nu\left(1-\frac{9}{4}e+\frac{1}{8}\frac{e^2}{\nu}\right)\cos[(\nu-2)u+\vartheta'] \\
&-\frac{65}{48}e\nu\cos[(\nu-3)u+\vartheta'] \\
&+\frac{1}{16}e^2\cos[(\nu-4)u+\vartheta'] \\
&-\frac{1}{20}e^2\cos[(\nu-5)u+\vartheta']
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sqrt{1-e^2}\int\left(\frac{a}{\varrho}\right)^3\Delta\,du = &-\frac{1}{8}e^2\left(\frac{5}{\nu}-\frac{99}{4}\right)\sin[\nu u+\vartheta'] \\
&+\frac{1}{4}e\left(5+\frac{37}{4}\nu\right)\sin[(\nu-1)u+\vartheta'] \\
&+\frac{1}{6}\nu\left(1-\frac{9}{4}e+\frac{23}{4}\frac{e^2}{\nu}\right)\sin[(\nu-2)u+\vartheta'] \\
&+\frac{89}{144}e\nu\sin[(\nu-3)u+\vartheta'] \\
&-\frac{1}{64}e^2\sin[(\nu-4)u+\vartheta'] \\
&+\frac{1}{100}e^2\sin[(\nu-5)u+\vartheta']
\end{aligned}$$

Die entsprechenden Ausdrücke für Θ ergeben sich ohne weiteres aus der Entwickelung (19) in Nr. 20. Es folgt:

[1]) Die mit höheren Potenzen von e multiplizierten Glieder vom Range $\frac{n_0}{n}$ heben sich größtenteils gegenseitig auf.

$$\Theta = + \frac{5}{4} e^2 \left(1 + \frac{\nu}{2}\right) \cos\left[\nu u + \vartheta'\right]$$
$$+ \frac{5}{4} e \nu \cos\left[(\nu - 1) u + \vartheta'\right]$$
$$- \frac{1}{4} \nu^2 \cos\left[(\nu - 2) u + \vartheta'\right]$$
$$+ \frac{1}{12} e \nu \cos\left[(\nu - 3) u + \vartheta'\right]$$

$$\sqrt{1 - e^2} \int_{\varrho}^{a} \Theta \, d u = + \frac{1}{4} e^2 \left(\frac{5}{\nu} + \frac{11}{4}\right) \sin\left[\nu u + \vartheta'\right]$$
$$- \frac{9}{8} e \nu \sin\left[(\nu - 1) u + \vartheta'\right]$$
$$+ \frac{1}{8} \nu^2 \sin\left[(\nu - 2) u + \vartheta'\right]$$
$$+ \frac{1}{72} e \nu \sin\left[(\nu - 3) u + \vartheta'\right]$$

Für die Ausdrücke I und II erhält man somit die folgenden Formeln:
Für die Bewegung von A um S:

$$\mathrm{I} = + \frac{1}{2\sqrt{1 - e_1^2}} \frac{m_3 + m_4}{m_1 + m_2 + m_3 + m_4} \left(\frac{n_0}{n_1}\right)^2 \left(\frac{a_1}{\varrho_1}\right)^2 \left\{ \frac{n_1}{n_0} I_1 \right.$$
$$+ \frac{15}{4} e_1^2 \frac{n_1}{n_0} \cos\left[2 \frac{n_0}{n_1} u_1 + 2 (\vartheta_1 - \varphi_1)\right]$$
$$- \frac{3}{4} e_1 \left(\frac{5 n_1}{n_0} + \frac{9}{2}\right) \cos\left[\left(1 - 2 \frac{n_0}{n_1}\right) u_1 - 2 (\vartheta_1 - \varphi_1)\right]$$
$$- 2 \left(1 - \frac{9}{4} e_1 + \frac{e_1^2}{16} \frac{n_1}{n_0}\right) \cos\left[\left(2 - 2 \frac{n_0}{n_1}\right) u_1 - 2 (\vartheta_1 - \varphi_1)\right]$$
$$- \frac{65}{24} e_1 \cos\left[\left(3 - 2 \frac{n_0}{n_1}\right) u_1 - 2 (\vartheta_1 - \varphi_1)\right]$$
$$+ \frac{e_1^2}{16} \frac{n_1}{n_0} \cos\left[\left(4 - 2 \frac{n_0}{n_1}\right) u_1 - 2 (\vartheta_1 - \varphi_1)\right]$$
$$\left. - \frac{e_1^2}{20} \frac{n_1}{n_0} \cos\left[\left(5 - 2 \frac{n_0}{n_1}\right) u_1 - 2 (\vartheta_1 - \varphi_1)\right] \right\}$$

$$\Pi = -\frac{1}{\sqrt{1-e_1^2}}\frac{m_3+m_4}{m_1+m_2+m_3+m_4}\left(\frac{n_0}{n_1}\right)^2\Bigg\{\sqrt{1-e_1^2}\,\frac{n_1}{n_0}\int\left(\frac{a_1}{\varrho_1}\right)^3 F_1\,du$$

$$-\frac{33}{4}e_1^2\frac{n_1}{n_0}\sin\left[2\frac{n_0}{n_1}+2(\vartheta_1-\varphi_1)\right]$$

$$-\frac{3}{4}e_1\left(\frac{5n_1}{n_0}+\frac{7}{2}\right)\sin\left[\left(1-2\frac{n_0}{n_1}\right)u_1-2(\vartheta_1-\varphi_1)\right]$$

$$-\frac{11}{8}\left(1-\frac{18}{11}e_1+\frac{23}{11}e_1^2\frac{n_1}{n_0}\right)\sin\left[\left(2-2\frac{n_0}{n_1}\right)u_1-2(\vartheta_1-\varphi_1)\right]$$

$$-\frac{15}{4}e_1\sin\left[\left(3-2\frac{n_0}{n_1}\right)u_1-2(\vartheta_1-\varphi_1)\right]$$

$$+\frac{3}{64}e_1^2\frac{n_1}{n_0}\sin\left[\left(4-2\frac{n_0}{n_1}\right)u_1-2(\vartheta_1-\varphi_1)\right]$$

$$-\frac{3}{100}e_1^2\frac{n_1}{n_0}\sin\left[\left(5-2\frac{n_0}{n_1}\right)u_1-2(\vartheta_1-\varphi_1)\right]\Bigg\}$$

Man erhält die entsprechenden Formeln für die Bewegung von C um S', indem man den Index 1 durch 2 ersetzt, und den Koeffizienten (m_3+m_4) durch (m_1+m_2).

25. In diesem Abschnitt wurde zu der Voraussetzung, daß die Quotienten $\frac{a_1}{a_0}$ und $\frac{a_2}{a_0}$ als kleine Größen betrachtet werden können, noch die gleiche bezüglich der Größen $\frac{n_0}{n_1}$ und $\frac{n_0}{n_2}$ hinzugefügt.

Diese Voraussetzung ist nicht immer zusammen mit der ersten erfüllt. So ist z. B. in dem System Sonne, Erde, Mond das Entfernungsverhältnis etwa $\frac{1}{390}$, das Verhältnis der mittleren Winkelgeschwindigkeiten dagegen $\frac{1}{13}$. Nach der Formel

$$\left(\frac{n_0}{n_1}\right)^2=\left(\frac{a_1}{a_0}\right)^3\frac{(m_1+m_2+m_3+m_4)(m_1+m_2)^2}{m_3^2}$$

und der entsprechenden für n_2 hängen $\frac{n_0}{n_1}$ und $\frac{n_0}{n_2}$ wesentlich von der Massenverteilung ab. In dem System, das Sonne und Erde — Mond bilden, ist m_3+m_4 die Sonnenmasse, m_1 die Masse des Mondes, m_2 die der Erde.

In dem Sternsystem ζ Cancri sind die Massen nur um wenige Vielfache voneinander verschieden; hier sind also auch $\frac{n_0}{n_1}$ und $\frac{n_0}{n_2}$ kleine Größen. Nach

den Untersuchungen Herrn Geheimrats v. Seeliger haben die Massen die folgenden Werte:

$$m_1 = m_2 = 1 \quad , \quad m_3 + m_4 = 4.74$$

Unter diesen Umständen erhalten besondere Bedeutung diejenigen Störungsglieder, die nur mit $\frac{n_0}{n}$ multipliziert sind. Am einflußreichsten sind von diesen die Glieder mit dem Argument $\left[\left(1 - 2\frac{n_0}{n}\right) u + 2(\vartheta - \varphi)\right]$. Die Glieder mit dem Argument $\left[2\frac{n_0}{n} u + 2(\vartheta - \varphi)\right]$ sind langperiodisch und werden deshalb nur wenig bemerkbar, die übrigen Glieder erhalten kleine Koeffizienten. Aber gerade diese größten Störungsglieder, deren Periode ungefähr gleich der Umlaufszeit des gestörten Körpers ist, lassen sich durch eine entsprechende Änderung der elliptischen Bahnelemente für einen längeren Zeitraum kompensieren. Der Einfluß einer solchen Bahnänderung äußert sich in den mit den Konstanten $c_1 \ldots . c_4$ multiplizierten Gliedern. Die in Frage kommenden Glieder lauten:

$$\frac{1}{a_1}\delta\varrho_1 = \quad c_1 \sin u_1 - c_2 \cos u_1 - \frac{3}{8} e_1 \left(\frac{5n_1}{n_0} + \frac{35}{6}\right) A_1 \cos\left[\left(1 - 2\frac{n_0}{n_1}\right) u_1 + 2(\vartheta_1 - \varphi_1)\right]$$

$$\delta w_1 = 2\left\{c_1 \cos u_1 + c_2 \sin u_1 + \frac{3}{8} e_1 \left(\frac{5n_1}{n_0} + \frac{7}{2}\right) A_1 \sin\left[\left(1 - 2\frac{n_0}{n_1}\right) u_1 + 2(\vartheta_1 - \varphi_1)\right]\right\}$$

$$A_1 = \frac{1}{\sqrt{1 - e_1^2}} \frac{m_3 + m_4}{m_1 + m_2 + m_3 + m_4} \left(\frac{n_0}{n_1}\right)^2.$$

Daraus ergibt sich ohne weiteres die Möglichkeit der Kompensation sowohl für $\delta\varrho_1$ als auch δw_1. Das gleiche gilt natürlich auch für die Bewegung von C um S'; nur sind hier die Störungen unbedeutend, im Positionswinkel etwa $0^\circ.25$ und im Radius Vektor nur $0''.001$.

Damit wird vollständig das Resultat bestätigt, zu dem Herr Geheimrat v. Seeliger in seinen Untersuchungen gelangte, daß nämlich trotz der bedeutenden störenden Einwirkungen der Massen von C und D auf die Bewegung von A und B umeinander, — die Störungen im Positionswinkel wachsen bis zu 29^0 — diese doch fast vollständig durch eine ungestörte Ellipse dargestellt werden kann.

In diesen Verhältnissen zeigt sich eine besondere Eigenschaft solcher Systeme wie ζ Cancri. Die Ansicht Herrn Dobercks, die störenden Massen müßten sehr gering sein, ist ein Verkennen der Sachlage.

V. Fortsetzung der Untersuchung für drei Körper.

26. Die Bestimmung der Integrationskonstanten $c_1 \ldots . c_4$ für jede einzelne Näherung hängt von der Wahl der Vergleichsbahn ab, die innerhalb der in Nr. 8 aufgestellten Voraussetzungen beliebig ist.

Naheliegend ist es, eine oskulierende Bahn zu Grunde zu legen; es müssen dann die Störungen der Koordinaten und Geschwindigkeiten für die Oskulationsepoche verschwinden. Durch diese Bedingung erhält man für jede Näherung die notwendigen Bestimmungsgleichungen für die Konstanten; und zwar ergibt sich:

$$c_i + \gamma_i = \int_{t_0}^{t} \frac{d\gamma_i}{dt}\, dt \qquad (i = 1, 2, 3, 4)$$

wo t_0 die Oskulationsepoche bedeutet. Aber durch diese Art der Konstantenbestimmung wird von vornherein die Darstellung des Bewegungsvorganges festgelegt und man begibt sich der Möglichkeit, die gerade durch die Konstanten $c_1 \ldots . c_4$ gegeben wird, durch eine entsprechende Wahl der Vergleichsbahn für die Störungen die geeignetste Form zu erhalten.

Für die Bestimmung der Konstanten können verschiedene Gesichtspunkte maßgebend sein: So wurde im vorhergehenden Abschnitt gezeigt, wie auf diese Weise säkulare Glieder vermieden oder besonders große Störungsglieder unschädlich gemacht werden können. Die bisherige Untersuchung war darin allgemein, daß sie Ellipsen als Vergleichsbahnen zu Grunde legte; für die Fortsetzung setzen wir diese kreisförmig voraus. Es genügt vorläufig, daß ein solcher Anfangszustand des Systems, der die Anwendung von Kreisbahnen zuläßt, möglich ist.

27. Indem wir uns auf drei Körper beschränken,[1]) kommen zwei verschiedene Fälle wesentlich in Betracht: Erstens, die Massen m_1 und m_2 sind einander gleich und die dritte Masse m ist beliebig; zweitens, die Massen m_1 und m_2 sind beliebig, aber die Masse m ist unendlich klein. so daß nur die Bewegung dieser Masse von den beiden anderen gestört wird,

Da jetzt nur noch drei Massenpunkte vorhanden sind, geht die Entwickelung der Störungsfunktion in eine Kugelfunktionsreihe nach Potenzen von $\frac{r}{r_0}$ mit dem Winkelargument $v_0 - v$ über, und da die Störungsveränderlichen ζ_1 und ζ_2 (Gl. 5 in Nr. 14) in erster Näherung die Störungen dieser Koordinaten

[1]) Dementsprechend fallen fernerhin die Indices 1 und 2 fort.

sind, empfiehlt es sich, von den Differentialgleichungen für diese Größen auszugehen. Die Grundgleichungen für die Untersuchung lauten demgemäß:

$$(1)\quad \begin{cases} \dfrac{d^2 r_0}{dt^2} - r_0 \left(\dfrac{dv_0}{dt}\right)^2 + k^2 (m_1 + m_2 + m) \dfrac{1}{r_0^2} = \dfrac{m_1 + m_2 + m}{m_1 + m_2} \dfrac{\partial R}{\partial r_0} \\ \dfrac{d^2 v_0}{dt^2} + \dfrac{2}{r_0} \dfrac{dr_0}{dt} \dfrac{dv_0}{dt} = \dfrac{m_1 + m_2 + m}{m_1 + m_2} \dfrac{1}{r_0^2} \dfrac{\partial R}{\partial v_0} \\ \dfrac{d^2 r}{dt^2} - r \left(\dfrac{dv}{dt}\right)^2 + k^2 \dfrac{m_2^3}{(m_1 + m_2)^2} \dfrac{1}{r^2} = \dfrac{1}{m_1 + m_2} \dfrac{m_2}{m_1} \dfrac{\partial R}{\partial r} \\ \dfrac{d^2 v}{dt^2} + \dfrac{2}{r} \dfrac{dr}{dt} \dfrac{dv}{dt} = \dfrac{1}{m_1 + m_2} \dfrac{m_2}{m_1} \dfrac{1}{r^2} \dfrac{\partial R}{\partial v} \\ R = k^2 \sum_{n=2}^{\infty} \left[m_1 + m_2 \left(- \dfrac{m_1}{m_2} \right)^n \right] \dfrac{r^n}{r_0^{n+1}} P_n (v_0 - v) \end{cases}$$

Dabei ist

$$(2)\quad m_3 = m_4 = \frac{m}{2}$$

Da die ungestörte Bewegung kreisförmig verläuft, fallen die wahre und exzentrische Anomalie mit der mittleren zusammen. Die partikulären Lösungen der Differentialgleichungen (6) in Nr. 14 nehmen jetzt eine sehr einfache Gestalt an; es ist

$$z_1 = + \sin \zeta$$
$$z_2 = - \cos \zeta$$
$$z_3 = - 1$$
$$z_4 = + 1$$

Es ist übersichtlicher, die vollständigen Lösungen nicht in der Umformung der Gleichungen (15) hinzuschreiben, sondern in der ursprünglichen Form. Es ist jetzt für alle Näherungen

$$(3)\quad \zeta_1 = \frac{1}{a} \delta \varrho \quad , \quad \zeta_2 = \delta \zeta$$

Als weitere Veränderliche führen wir die Geschwindigkeiten ein

$$(3')\quad \frac{dr}{d\zeta} = \delta \sigma \quad , \quad \frac{dv}{d\zeta} = 1 + \delta \tau$$

Für die ungestörte Bewegung verschwindet $\frac{dr}{d\zeta}$ und $\frac{dv}{d\zeta}$ wird gleich 1. Wir erhalten dann das folgende Gleichungssystem:

$$(4)\quad \begin{cases} \frac{1}{a}\delta\varrho = (c_1+\gamma_1)\sin\zeta - (c_2+\gamma_2)\cos\zeta - (c_3+\gamma_3) \\ \delta\zeta = 2(c_1+\gamma_1)\cos\zeta + 2(c_2+\gamma_2)\sin\zeta + \frac{3}{2}(c_3+\gamma_3)\zeta + c_4+\gamma_4 \\ \frac{1}{a}\delta\sigma = (c_1+\gamma_1)\cos\zeta + (c_2+\gamma_2)\sin\zeta \\ \delta\tau = -2(c_1+\gamma_1)\sin\zeta + 2(c_2+\gamma_2)\cos\zeta + \frac{3}{2}(c_3+\gamma_3) \end{cases}$$

Die Größen $\gamma_1 \ldots . \gamma_2$ werden aus den Gleichungen bestimmt:

$$(5)\quad \begin{cases} \frac{d\gamma_1}{d\zeta} = S\cos\zeta - 2T\sin\zeta \\ \frac{d\gamma_2}{d\zeta} = S\sin\zeta + 2T\cos\zeta \\ \frac{d\gamma_3}{d\zeta} = -2T \\ \frac{d\gamma_4}{d\zeta} = -2S + 3T\zeta \end{cases}$$

Darin haben S und T die frühere Bedeutung, und zwar erhalten diese Größen für die Störungen m^{ter} Ordnung den Index m.

Die Größen, die sich auf die Bewegung von S' um S beziehen, werden durch einen angehängten Index 0 unterschieden. Die Störungen schreiben wir in der Form

$$(6)\quad \begin{cases} \delta\varrho = \sum_{m=1}^{\infty}\delta_m\varrho & \delta\varrho_0 = \sum_{m=1}^{\infty}\delta_m\varrho_0 \\ \delta\zeta = \sum_{m=1}^{\infty}\delta_m\zeta & \delta\zeta_0 = \sum_{m=1}^{\infty}\delta_m\zeta_0 \\ \delta\sigma = \sum_{m=1}^{\infty}\delta_m\sigma & \delta\sigma_0 = \sum_{m=1}^{\infty}\delta_m\sigma_0 \\ \delta\tau = \sum_{m=1}^{\infty}\delta_m\tau & \delta\tau_0 = \sum_{m=1}^{\infty}\delta_m\tau_0 \end{cases}$$

28. Wir gehen nun zur Untersuchung des ersten Falles über:

$$m_1 = m_2 = 1$$

und leiten zunächst die vollständigen Störungen erster Ordnung ab.

Die Funktionen $S_0^{(1)}$, $T_0^{(1)}$, $S^{(1)}$ und $T^{(1)}$ lauten nach dem Früheren:

$$S_0^{(1)} = -\frac{3}{4}\left(\frac{a}{a_0}\right)^2 [1 + 3\cos 2(\zeta - \zeta_0 + \varphi)]$$

$$T_0^{(1)} = +\frac{3}{2}\left(\frac{a}{a_0}\right)^2 \sin 2(\zeta - \zeta_0 + \varphi)$$

$$S^{(1)} = +2m\left(\frac{a}{a_0}\right)^3 [1 + 3\cos 2(\zeta - \zeta_0 + \varphi)]$$

$$T^{(1)} = -6m\left(\frac{a}{a_0}\right)^3 \sin 2(\zeta - \zeta_0 + \varphi)$$

Daraus ergeben sich für $\gamma_{1,0}^{(1)} \ldots \gamma_{4,0}^{(1)}$, $\gamma_1^{(1)} \ldots \gamma_4^{(1)}$ die Ausdrücke:

$$\gamma_{1,0}^{(1)} = -\frac{3}{4}\left(\frac{a}{a_0}\right)^2 \left[\sin\zeta_0 - \frac{1}{2}\frac{n_0}{2n - n_0}\sin(2\zeta - \zeta_0 + 2\varphi) + \frac{7}{2}\frac{n_0}{2n - 3n_0}\sin(2\zeta - 3\zeta_0 + 2\varphi)\right]$$

$$\gamma_{2,0}^{(1)} = +\frac{3}{4}\left(\frac{a}{a_0}\right)^2 \left[\cos\zeta_0 - \frac{1}{2}\frac{n_0}{2n - n_0}\cos(2\zeta - \zeta_0 + 2\varphi) - \frac{7}{2}\frac{n_0}{2n - 3n_0}\cos(2\zeta - 3\zeta_0 + 2\varphi)\right]$$

$$\gamma_{3,0}^{(1)} = +3\left(\frac{a}{a_0}\right)^2 \frac{n_0}{2n - 2n_0}\cos 2(\zeta - \zeta_0 + \varphi)$$

$$\gamma_{4,0}^{(1)} = +\frac{3}{2}\left(\frac{a}{a_0}\right)^2 \left[1 - \frac{3n_0}{2n - 2n_0}\cos 2(\zeta - \zeta_0 + \varphi)\right]\zeta_0$$

$$+\frac{9}{2}\left(\frac{a}{a_0}\right)^2 \frac{n_0}{2n - 2n_0}\left(1 + \frac{n_0}{2n - 2n_0}\right)\sin 2(\zeta - \zeta_0 + \varphi)$$

$$\gamma_1^{(1)} = +2m\left(\frac{a}{a_0}\right)^3 \left[\sin\zeta + \frac{9}{2}\frac{n}{2n - 2n_0}\sin(\zeta - 2\zeta_0 + 2\varphi) - \frac{3}{2}\frac{n}{3n - 2n_0}\sin(3\zeta - 2\zeta_0 + 2\varphi)\right]$$

$$\gamma_2^{(1)} = -2m\left(\frac{a}{a_0}\right)^3 \left[\cos\zeta + \frac{9}{2}\frac{n}{2n - 2n_0}\cos(\zeta - 2\zeta_0 + 2\varphi) + \frac{3}{2}\frac{n}{3n - 2n_0}\cos(3\zeta - 2\zeta_0 + 2\varphi)\right]$$

$$\gamma_3^{(1)} = -12m\left(\frac{a}{a_0}\right)^3 \frac{n}{2n - 2n_0}\cos 2(\zeta - \zeta_0 + \varphi)$$

$$\gamma_4^{(1)} = -4m\left(\frac{a}{a_0}\right)^3 \left[1 - \frac{9}{2}\frac{n}{2n - 2n_0}\cos 2(\zeta - \zeta_0 + \varphi)\right]\zeta$$

$$-12m\left(\frac{a}{a_0}\right)^3 \frac{n}{2n - 2n_0}\left(1 + \frac{3}{2}\frac{n}{2n - 2n_0}\right)\sin 2(\zeta - \zeta_0 + \varphi)$$

Durch Einsetzen in die Gleichungen (5) erhält man für die Störungen die Ausdrücke:

$$(7_0)\quad \begin{cases} \frac{1}{a_0}\delta_1\varrho_0 = & c_{1,0}\sin\zeta_0 - c_{2,0}\cos\zeta_0 - c_{3,0} \\ & -\frac{3}{4}\left(\frac{a}{a_0}\right)^2\left\{1-\left[\frac{1}{2}\frac{n_0}{2n-n_0}-4\frac{n_0}{2n-2n_0}+\frac{7}{2}\frac{n_0}{2n-3n_0}\right]\cos 2\,(\zeta-\zeta_0+\varphi)\right\} \\ \delta_1\zeta_0 = & 2\,c_{1,0}\cos\zeta_0 + 2\,c_{2,0}\sin\zeta_0 + \frac{3}{2}c_{3,0}\,\zeta_0 + c_{4,0} \\ & +\frac{3}{2}\left(\frac{a}{a_0}\right)^2\left\{\zeta_0+\left[\frac{1}{2}\frac{n_0}{2n-n_0}+3\frac{n_0}{2n-2n_0}\left(1+\frac{n_0}{2n-2n_0}\right)-\frac{7}{2}\frac{n_0}{2n-3n_0}\right]\sin 2(\zeta-\zeta_0+\varphi)\right\} \\ \frac{1}{a_0}\delta_1\sigma_0 = & c_{1,0}\cos\zeta_0 + c_{2,0}\sin\zeta_0 \\ & +\frac{3}{8}\left(\frac{a}{a_0}\right)^2\left[\frac{n_0}{2n-n_0}-7\frac{n_0}{2n-3n_0}\right]\sin 2\,(\zeta-\zeta_0+\varphi) \\ \delta_1\tau_0 = & -2\,c_{1,0}\sin\zeta_0 + 2\,c_{2,0}\cos\zeta_0 + \frac{3}{2}c_{3,0} \\ & +\frac{3}{2}\left(\frac{a}{a_0}\right)^2\left\{1-\left[\frac{1}{2}\frac{n_0}{2n-n_0}-3\frac{n_0}{2n-2n_0}+\frac{7}{2}\frac{n_0}{2n-3n_0}\right]\cos 2\,(\zeta-\zeta_0+\varphi)\right\} \end{cases}$$

$$(7)\quad \begin{cases} \frac{1}{a}\delta_1\varrho = & c_1\sin\zeta - c_2\cos\zeta - c_3 \\ & +2m\left(\frac{a}{a_0}\right)^3\left\{1-\left[\frac{9}{2}\frac{n}{n-2n_0}-6\frac{n}{2n-2n_0}+\frac{3}{2}\frac{n}{3n-2n_0}\right]\cos 2\,(\zeta-\zeta_0+\varphi)\right\} \\ \delta_1\zeta = & 2\,c_1\cos\zeta + 2\,c_2\sin\zeta + \frac{3}{2}c_3\,\zeta + c_4 \\ & -4m\left(\frac{a}{a_0}\right)^3\left\{\zeta-\left[\frac{9}{2}\frac{n}{n-2n_0}-3\frac{n}{2n-2n_0}\left(1+\frac{3}{2}\frac{n}{2n-2n_0}\right)-\frac{3}{2}\frac{n}{3n-2n_0}\right]\sin 2\,(\zeta-\zeta_0+\varphi)\right\} \\ \frac{1}{a}\delta_1\sigma = & c_1\cos\zeta + c_2\sin\zeta \\ & +3m\left(\frac{a}{a_0}\right)^3\left[3\frac{n}{n-2n_0}-\frac{n}{3n-2n_0}\right]\sin 2\,(\zeta-\zeta_0+\varphi) \\ \delta_1\tau = & -2\,c_1\sin\zeta + 2\,c_2\cos\zeta + \frac{3}{2}c_3 \\ & -4m\left(\frac{a}{a_0}\right)^3\left\{1-\left[\frac{9}{2}\frac{n}{n-2n_0}-\frac{9}{2}\frac{n}{2n-2n_0}+\frac{3}{2}\frac{n}{3n-2n_0}\right]\cos 2\,(\zeta-\zeta_0+\varphi)\right\} \end{cases}$$

Die allgemeine Form der Störungsglieder ergibt sich mittels des Schlusses von m auf $m+1$. Es soll gezeigt werden, daß die Funktionen

$$\delta_m \varrho_0 \ldots . \delta_m \tau_0 \quad , \quad \delta_m \varrho \ldots . \delta_m \tau$$

bei passender Wahl der Konstanten $c_{1,0} \ldots . c_{4,0}$, $c_1 \ldots . c_4$ Ausdrücke von der folgenden Form sind:

$$(8_0) \qquad \begin{cases} \dfrac{1}{a_0}\delta_m \varrho_0 = \sum_{k=0}^{m} a_0^{(k)} \cos 2k(\zeta - \zeta_0 + \varphi) \\ \delta_m \zeta_0 = \sum_{k=0}^{m} b_0^{(k)} \sin 2k(\zeta - \zeta_0 + \varphi) \\ \dfrac{1}{a_0}\delta_m \sigma_0 = \sum_{k=0}^{m} c_0^{(k)} \sin 2k(\zeta - \zeta_0 + \varphi) \\ \delta_m \tau_0 = \sum_{k=0}^{m} d_0^{(k)} \cos 2k(\zeta - \zeta_0 + \varphi) \end{cases}$$

$$(8) \qquad \begin{cases} \dfrac{1}{a}\delta_m \varrho = \sum_{k=0}^{m} a^{(k)} \cos 2k(\zeta - \zeta_0 + \varphi) \\ \delta_m \zeta = \sum_{k=0}^{m} b^{(k)} \sin 2k(\zeta - \zeta_0 + \varphi) \\ \dfrac{1}{a}\delta_m \sigma = \sum_{k=0}^{m} c^{(k)} \sin 2k(\zeta - \zeta_0 + \varphi) \\ \delta_m \tau = \sum_{k=0}^{m} d^{(k)} \cos 2k(\zeta - \zeta_0 + \varphi) \end{cases}$$

Die in diesen Ausdrücken vorkommenden Koeffizienten $a_0^{(k)} \ldots . d_0^{(k)}$, $a^{(k)} \ldots . d^{(k)}$ sind kleine Größen von der m^{ten} oder von höherer Ordnung. Daß die Störungsglieder für $m = 1$ diese Eigenschaften besitzen, zeigen die Gleichungen (7_0) und (7), wenn man die Konstanten in der folgenden Weise bestimmt:

$$(9) \qquad \begin{cases} c_{1,0} = c_{2,0} = c_{4,0} = 0 \\ \qquad\qquad c_{3,0} = -\left(\dfrac{a}{a_0}\right)^2 \\ c_1 = c_2 = c_4 = 0 \\ \qquad\qquad c_3 = +\dfrac{8}{3} m \left(\dfrac{a}{a_0}\right)^3 \end{cases}$$

Es wird also vorausgesetzt, daß die Störungsglieder bis zur m^{ten} Ordnung einschließlich Ausdrücke von der Form (8_0) und (8) sind.

Zunächst hat man die Form der Funktionen

$$S_0^{(m+1)},\ T_0^{(m+1)},\ S^{(m+1)},\ T^{(m+1)}$$

aufzusuchen.

Wir bezeichnen mit S und T die Taylorschen Entwickelungen der Ausdrücke

$$\frac{1}{n^2}\left[r\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 - k^2(m_1+m_2+m)\frac{1}{r^2}\right]$$

$$-\frac{1}{n^2}\frac{2}{r}\frac{dr}{dt}\frac{dv}{dt}$$

nach Potenzen der Störungen, und zwar anfangend mit den quadratischen Gliedern. Die Reihen lauten:

$$(10)\quad \begin{cases} S = \delta\tau\left[2\frac{\delta\varrho}{a} + \delta\tau + \frac{\delta\varrho}{a}\delta\tau\right] - \frac{\delta\varrho}{a}\left[3\frac{\delta\varrho}{a} - 4\left(\frac{\delta\varrho}{a}\right)^2 + 5\left(\frac{\delta\varrho}{a}\right)^3 \mp \cdots\right] \\ T = -2\frac{\delta\sigma}{a}\delta\tau + 2\frac{\delta\sigma}{a}(1+\delta\tau)\left[\frac{\delta\varrho}{a} - \left(\frac{\delta\varrho}{a}\right)^2 + \left(\frac{\delta\varrho}{a}\right)^3 \mp \cdots\right] \end{cases}$$

Die entsprechenden Entwickelungen für S' bezeichnen wir mit S_0 und T_0; sie gehen aus den vorstehenden hervor, indem man an Stelle der Größen ohne Index die entsprechenden mit dem Index 0 setzt.

Die Funktionen $S_0^{(m+1)}$ und $S^{(m+1)}$ setzen sich aus zwei Bestandteilen zusammen, von denen der erste das Glied $(m+1)^{\text{ter}}$ Ordnung der Reihe S_0 resp. S ist, nachdem man in diese die Entwickelungen (8_0) resp. (8) eingesetzt hat. Dieses Glied stellt sich dar als eine Kosinusreihe, die nach Vielfachen von $2(\zeta - \zeta_0 + \varphi)$ fortschreitet und zwar bis zu dem Argument $2(m+1)(\zeta - \zeta_0 + \varphi)$. Der zweite Term in dem Ausdruck für die Funktion $S_0^{(m+1)}$ entsteht aus der Reihe

$$-\frac{a_0^2}{2}\sum_{n=2}^{\infty}[1+(-1)^n](n+1)\frac{r^n}{r_0^{n+2}}P_n(v_0 - v)$$

und für $S^{(m+1)}$ aus

$$+2a^2\sum_{n=2}^{\infty}[1+(-1)^n]n\frac{r^{n-1}}{r_0^{n+1}}P_n(v_0 - v)$$

Entwickelt man den Ausdruck $\frac{r^n}{r_0^{n+2}} \cdot P_n$, in welchem der eine Faktor nur die Radien Vektoren, der andere nur die Positionswinkel enthält, in eine

Taylorsche Reihe, die nach Potenzen der Störungen fortschreitet, so erhält man eine Reihe von der folgenden Form:

$$\frac{r^n}{r_0^{n+2}} P_n = \sum M_{l_0, l, l_0', l'} \left(\frac{\delta \varrho_0}{a_0}\right)^{l_0} \left(\frac{\delta \varrho}{a}\right)^{l} (\delta \zeta_0)^{l_0'} (\delta \zeta)^{l'}$$

In diese Reihe hat man für die Störungen die Entwickelungen (8_0) und (8) einzusetzen, für alle in Betracht kommenden Werte von n die Glieder $(m+1)^{\text{ter}}$ Ordnung auszusuchen und diese zu dem gesuchten Glied von $S_0^{(m+1)}$ zusammenzufassen; in gleicher Weise wird das Glied von $S^{(m+1)}$ gebildet. Der Koeffizient $M_{l_0, l, l_0', l'}$ setzt sich aus zwei Faktoren zusammen, von denen der eine aus der Entwickelung von $\frac{r^n}{r_0^{n+2}}$, der andere aus der Entwickelung von P_n hervorgeht. Der erste Faktor ist konstant; er wird erhalten dadurch, daß man den Ausdruck $\frac{r^n}{r_0^{n+2}}$ verschiedentlich differentiiert und dann die ungestörten Werte, a_0 und a, für die Radien Vektoren einsetzt. Der zweite Faktor entsteht durch $(l_0' + l')$-maliges Differentiieren von P_n nach $(v_0 - v)$ und Einsetzen von $(\zeta - \zeta_0 + \varphi)$ an Stelle von $(v_0 - v)$.

Da wiederum von den Störungsgliedern nur diejenigen in Betracht kommen, für welche die Voraussetzungen (8_0) und (8) gelten, so stellt das Produkt $\left(\frac{\delta \varrho_0}{a_0}\right)^{l_0} \left(\frac{\delta \varrho}{a}\right)^{l}$ eine Kosinusreihe dar. Die Reihen für $\delta \zeta_0$ und $\delta \zeta$ sind Sinusreihen; ist also $l_1' + l_2'$ eine ganze Zahl, so stellt das Produkt eine Kosinusreihe dar. In diesem Fall ist aber auch der zweite Faktor von $M_{l_0, l, l_0', l'}$ eine Kosinusreihe, so daß also in allen diesen Fällen nur Kosinusglieder zu dem gesuchten Glied $(m+1)^{\text{ter}}$ Ordnung beitragen können. Ist $l_0' + l'$ ungerade, so ist $M_{l_0, l, l_0', l'}$ eine Sinusreihe; das gleiche gilt dann auch von dem Produkt $(\delta \zeta_0)^{l_0'} (\delta \zeta)^{l'}$, so daß wiederum aus dem Produkt beider Reihen nur Kosinusglieder entstehen können. Bildet man nun die Summe über den Index n, so folgt, daß der zweite Bestandteil der Funktionen $S_0^{(m+1)}$ und $S^{(m+1)}$ eine Kosinusreihe ist, die nach Vielfachen von $2(\zeta - \zeta_0 + \varphi)$ fortschreitet. Das größte in dieser Reihe auftretende Argument ist $2(m+1)(\zeta - \zeta_0 + \varphi)$.

Die Funktionen $T_0^{(m+1)}$ und $T^{(m+1)}$ setzen sich in analoger Weise aus zwei Teilen zusammen, von denen der erste aus der Reihe T_0 resp. T, der zweite aus den Reihen

$$- \frac{a_0^2}{2} \sum_{n=2}^{\infty} [1 + (-1)^n] \frac{r^n}{r_0^{n+2}} Q_n (v_0 - v)$$

$$+ 2a^2 \sum_{n=2}^{\infty} [1 + (-1)^n] \frac{r^{n-1}}{r_0^{n+1}} Q_n (v_0 - v)$$

hervorgeht, und zwar das Glied in $T_0^{(m+1)}$ aus der ersten, dasjenige in $T^{(m+1)}$ aus der zweiten Reihe. Dabei wurde abkürzend

$$Q_n = \frac{d P_n}{d(v_0 - v)}$$

gesetzt.

Ähnliche Betrachtungen wie bisher zeigen, daß die Funktionen $T_0^{(m+1)}$ und $T^{(m+1)}$ nur Sinusglieder enthalten können; das größte Argument ist wieder $2(m+1)(\zeta - \zeta_0 + \varphi)$.

Somit können wir die Funktionen $S_0^{(m+1)} \ldots T^{(m+1)}$ in der folgenden Form schreiben:

$$(11)\quad \begin{cases} S_0^{(m+1)} = \sum_{k=0}^{m+1} A_0^{(k)} \cos 2k(\zeta - \zeta_0 + \varphi) \\ T_0^{(m+1)} = \sum_{k=0}^{m+1} B_0^{(k)} \sin 2k(\zeta - \zeta_0 + \varphi) \\ S^{(m+1)} = \sum_{k=0}^{m+1} A^{(k)} \cos 2k(\zeta - \zeta_0 + \varphi) \\ T^{(m+1)} = \sum_{k=0}^{m+1} B^{(k)} \sin 2k(\zeta - \zeta_0 + \varphi) \end{cases}$$

Die Koeffizienten $A_0^{(k)} \ldots B^{(k)}$ sind dabei Größen von der $(m+1)^{\text{ten}}$ oder von höherer Ordnung.

Die Störungen erhält man aus den Gleichungen (5) und (6). Es folgt zunächst durch Integration der Gleichungen (5):

$$(12_0)\quad \begin{cases} \gamma_{1,0}^{(m+1)} = + \sum_{k=0}^{m+1} \left[\frac{1}{2} A_0^{(k)} + B_0^{(k)}\right] \frac{n_0}{2kn - (2k-1)n_0} \sin\left[2k(\zeta+\varphi) - (2k-1)\zeta_0\right] \\ \qquad\qquad + \sum_{k=0}^{m+1} \left[\frac{1}{2} A_0^{(k)} - B_0^{(k)}\right] \frac{n_0}{2kn - (2k+1)n_0} \sin\left[2k(\zeta+\varphi) - (2k+1)\zeta_0\right] \\ \gamma_{2,0}^{(m+1)} = - \sum_{k=0}^{m+1} \left[\frac{1}{2} A_0^{(k)} + B_0^{(k)}\right] \frac{n_0}{2kn - (2k-1)n_0} \cos\left[2k(\zeta+\varphi) - (2k-1)\zeta_0\right] \\ \qquad\qquad + \sum_{k=0}^{m+1} \left[\frac{1}{2} A_0^{(k)} - B_0^{(k)}\right] \frac{n_0}{2kn - (2k+1)n_0} \cos\left[2k(\zeta+\varphi) - (2k+1)\zeta_0\right] \\ \gamma_{3,0}^{(m+1)} = + \sum_{k=1}^{m+1} B_0^{(k)} \frac{n_0}{k(n - n_0)} \cos 2k(\zeta - \zeta_0 + \varphi) \\ \gamma_{4,0}^{(m+1)} = - \zeta_0 \left\{ 2A_0^{(0)} + 3 \sum_{k=1}^{m+1} B_0^{(k)} \frac{n_0}{2k(n - n_0)} \cos 2k(\zeta - \zeta_0 + \varphi) \right\} \\ \qquad\qquad - \sum_{k=1}^{m+1} \left[2A_0^{(k)} - 3B_0^{(k)} \frac{n_0}{2kn - n_0}\right] \frac{n_0}{2k(n - n_0)} \sin 2k(\zeta - \zeta_0 + \varphi) \end{cases}$$

$$
(12)\quad \left\{\begin{aligned}
\gamma_1^{(m+1)} &= +\sum_{k=0}^{m+1}\left[\frac{1}{2}A^{(k)}+B^{(k)}\right]\frac{n}{(2k+1)\,n-2k\,n_0}\sin\left[(2k+1)\,\zeta-2k\,(\zeta_0-\varphi)\right]\\
&\quad+\sum_{k=0}^{m+1}\left[\frac{1}{2}A^{(k)}-B^{(k)}\right]\frac{n}{(2k-1)\,n-2k\,n_0}\sin\left[(2k-1)\,\zeta-2k\,(\zeta_0-\varphi)\right]\\
\gamma_2^{(m+1)} &= -\sum_{k=0}^{m+1}\left[\frac{1}{2}A^{(k)}+B^{(k)}\right]\frac{n}{(2k+1)\,n-2k\,n_0}\cos\left[(2k+1)\,\zeta-2k\,(\zeta_0-\varphi)\right]\\
&\quad+\sum_{k=0}^{m+1}\left[\frac{1}{2}A^{(k)}-B^{(k)}\right]\frac{n}{(2k-1)\,n-2k\,n_0}\cos\left[(2k-1)\,\zeta-2k\,(\zeta_0-\varphi)\right]\\
\gamma_3^{(m+1)} &= +\sum_{k=1}^{m+1}B^{(k)}\frac{n}{k\,(n-n_0)}\cos 2k\,(\zeta-\zeta_0+\varphi)\\
\gamma_4^{(m+1)} &= -\zeta\left\{2A^{(0)}+3\sum_{k=1}^{m+1}B^{(k)}\frac{n}{2k\,(n-n_0)}\cos 2k\,(\zeta-\zeta_0+\varphi)\right\}\\
&\quad-\sum_{k=1}^{m+1}\left[2A^{(k)}-3B^{(k)}\frac{n}{2k\,(n-n_0)}\right]\frac{n}{2k\,(n-n_0)}\sin 2k\,(\zeta-\zeta_0+\varphi)
\end{aligned}\right.
$$

Aus den Gleichungen (5) ergeben sich nunmehr die Störungen. Man erhält die allgemeine Form (8_0) und (8) für den Index $m+1$, wenn man die Konstanten in der folgenden Weise bestimmt:

$$
(13)\quad \left\{\begin{aligned}
c_{1,0} = c_{2,0} = c_{4,0} &= 0\\
c_{3,0} &= \frac{4}{3}A_0^{(0)}\\
c_2 = c_2 = c_4 &= 0\\
c_3 &= \frac{4}{3}A^{(0)}
\end{aligned}\right.
$$

Wie aus den Gleichungen (12_0) und (12) hervorgeht, sind die bei der Integration auftretenden Koeffizienten

$$\frac{n_0}{\alpha\,n_1+\beta\,n_0}\quad,\quad\frac{n_1}{\alpha'\,n_1+\beta'\,n_0}$$

stets Größen 0ter oder höherer Ordnung. Daher werden bei der Konstantenbestimmung (13) die Anfangswerte der Störungen $\frac{1}{a_0}\delta_{m+1}\varrho_0\ldots.\,\delta_{m+1}\tau_0$, $\frac{1}{a}\delta_{m+1}\varrho\ldots.\,\delta_{m+1}\tau$ Größen von der $(m+1)^{\text{ten}}$ Ordnung, wie es zur Konvergenz des sukzessiven Integrationsverfahrens notwendig ist. Es ist also die Bestim-

mung der Konstanten durch die Gleichungen (13) möglich und die Reihen (7_0) und (7) stellen wirklich die allgemeine Form der Störungen für jeden Wert von m dar.

29. Damit ist in ihrer allgemeinen Form die Integration der Differentialgleichungen für die Bewegung in diesem System durchgeführt. Die Lösungen sind periodische Funktionen mit dem Argument $2(\zeta - \zeta_0 + \varphi)$ und der Periode 360^0. Nach den Entwickelungen im Abschnitt II sind diese Reihen für die Störungen innerhalb eines endlichen Zeitintervalls t bei einem entsprechenden Anfangszustand des Systems unbedingt konvergent; ordnet man die Reihen nach Vielfachen des Winkelargumentes, so ist der Koeffizient des k^{ten} Gliedes eine Größe k^{ter} Ordnung. Die Bedingungen des Anfangszustandes bestehen darin, daß er sich hinreichend wenig von den Anfangswerten einer Kreisbahn unterscheidet, und das Radienverhältnis der beiden Kreisbahnen hinreichend klein ist.

Wir bezeichnen die trigonometrischen Reihen für die Störungen mit

$$\lambda_i(t) \quad , \quad \lambda_{i,0}(t) \qquad (i = 1, 2, 3, 4)$$

und ihre absolut größten Beträge mit

$$A_i \quad , \quad A_{i,0}$$

Die Ausdrücke für die Koordinaten lauten dann:

$$(14) \qquad \begin{cases} r = a + \lambda_1(t) \\ r - \eta = \zeta + \lambda_2(t) \\ \dfrac{dr}{dt} = \lambda_3(t) \\ \dfrac{dv}{dt} = n + \lambda_4(t) \end{cases}$$

und entsprechend für die Veränderlichen mit dem Index 0.[1]) Da die Größen $A_{i,0}$ und A_i von der zweiten resp. dritten Ordnung in Bezug auf das Verhältnis $\frac{a}{a_0}$ sind, so erhält man aus den Gleichungen (14) und (14_0) solche Systeme, deren Anfangszustand die Voraussetzungen erfüllt, wenn nur dieses Verhältnis klein genug ist. Wir setzen nun ein derartiges System voraus.

Zur Anfangsepoche t_0 ist:

$$r = a + \lambda_1(t_0) = r'$$

$$r_0 = a_0 + \lambda_{1,0}(t_0) = r_0$$

[1]) Diese Gleichungen mögen mit (14_0) bezeichnet werden.

Da die Voraussetzung (4) des Abschnittes II erfüllt sein soll, so besteht während des Ablaufs der Bewegung innerhalb $(t - t_0) < \tau$ die Ungleichung

$$\frac{r}{r_0} \leqq \varepsilon \tag{15}$$

wo ε eine kleine aber endliche Größe bedeutet.

Ferner sei R eine positive Größe derart, daß in diesem Zeitintervall

$$|r - r'| \leqq R \quad ; \quad |r_0 - r_0'| \leqq R$$

Da in dem Zeitabschnitt τ die Bewegung der Punkte durch die Gleichungen (14) und (14_0) dargestellt wird, besteht die Ungleichung

$$\frac{r}{r_0} < \frac{a + A_1}{a_0 - A_{1,0}} \tag{16}$$

und in verstärktem Maße

$$\frac{r}{r_0} < \frac{a + A_1 + R}{a_0 - A_{1,0} - R}$$

Wir setzen nun

$$\varepsilon = \frac{a + A_1 + R}{a_0 - A_{1,0} - R} \tag{17}$$

und benutzen diese Gleichung zur Ableitung einer oberen Grenze für das Verhältnis $\frac{a}{a_0}$. Mit dieser Bestimmung wird die Voraussetzung (15) erfüllt.

An der Grenze des Intervalls τ besteht die Ungleichung (16). Grenzt man nun um die entsprechenden Werte für Lage und Geschwindigkeit der beiden Punkte A und C als neuen Anfangswerten ein Gebiet R ab, so gilt in diesem die Ungleichung

$$\frac{r}{r_0} < \frac{a + A_1 + R}{a - A_{1,0} - R}$$

oder wegen (17) die Ungleichung (15). Da weiter die Koordinaten und Geschwindigkeiten der Punkte sich für diesen Zeitpunkt nur um kleine Größen von der 2ten und 3ten Ordnung von Kreisbahnwerten unterscheiden, so folgt, daß von dieser neuen Anfangsepoche ausgehend sich der Bewegungsvorgang in einem Zeitintervall τ', das über τ hinausgeht, wiederum durch konvergente Entwickelungen von der Form (14) und (14_0) darstellen läßt. Ferner lassen sich die Konstanten der Kreisbahn so bestimmen, daß die beiden Entwickelungen für den gemeinsamen Teil von τ und τ' die gleichen Werte ergeben. Es stimmen dann die Reihen überhaupt miteinander überein, d. h. die Gleichungen

(14) und (14_0) behalten auch in dem erweiterten Intervall $(\tau + \tau')$ ihre Gültigkeit und stellen die Lösung der Differentialgleichungen dar. An der Grenze von $(\tau + \tau')$ besteht dann wieder die Ungleichung (16) und die Werte für die Koordinaten und Geschwindigkeiten der Punkte sind nur wenig von Kreisbahnwerten verschieden. Durch Wiederholung der Betrachtungen folgert man die Gültigkeit der Reihen (14) und (14_0) auch für ein über $(\tau + \tau')$ hinausgehendes Zeitintervall und durch Fortsetzung dieser Schlußweise ihre Gültigkeit für beliebige Zeiträume.

Wir gelangen somit zu dem folgenden Resultat: *Satz I.* — Es seien die Massenpunkte A, B, C gegeben mit den Massen

$$m_1 = m_2 = 1 \quad ; \quad m$$

die sich zu einer Anfangsepoche in einer Ebene bewegen und zwar in der Weise, daß sich die Bewegung von A um den Schwerpunkt S von A und B und diejenige von C um S nach Lage und Geschwindigkeit hinreiehend wenig von einer Kreisbewegung unterscheiden;[1]) und das Entfernungsverhältnis $\frac{AS}{CS}$ sei hinreichend klein: Es ist dann die Bewegung von A und C um S periodisch und bleibt für beliebige Zeiträume einer Kreisbewegung benachbart. Ist die Umlaufszeit in der Kreisbahn von A um S U, von C um S U_0, so ist die Periode der Störungen

$$P = \frac{U}{2} \frac{1}{1 - \frac{U}{U_0}}$$

30. Wir setzen jetzt die Massen m_1 und m_2 wieder beliebig voraus.

In der Entwickelung der Störungsfunktion sind die Glieder $n = 3, 5, 7 \ldots$. mit dem Faktor $(m_1 - m_2)$ multipliziert. Sind also die beiden Massen verschieden, so verschwinden diese Glieder nicht. Die Folge davon ist, daß die Kugelfunktion P_n und ihre Ableitung Q_n für ungerade Werte von n je ein Glied mit dem Argument $(v - v_0)$ enthalten und dementsprechend in den Funktionen $S^{(m)}$ und $T^{(m)}$, $S_0^{(m)}$ und $T_0^{(m)}$ Glieder mit dem Argument $(\zeta - \zeta_0 + \varphi)$ auftreten. In den Störungsausdrücken für die Bewegung von A um S ergeben

---

[1]) Doch sind auch innerhalb dieser Grenzen die Anfangswerte nicht ganz beliebig. Die Gleichungen (14) und (14_0) enthalten im ganzen vier Konstanten

$$\frac{a}{\pi - n\tau} \quad ; \quad \frac{a_0}{\pi_0 - n_0\tau_0}$$

Da diesen acht Anfangswerte für die Koordinaten und Geschwindigkeiten von A und C gegenüber stehen, so sind diese noch gewissen Bedingungen unterworfen.

sich aus diesen Gliedern solche, die mit dem Faktor $\frac{n}{n_0}$ multipliziert sind. Diese Glieder lassen sich durch irgend eine Wahl der Konstanten $c_1 \ldots . c_4$ nicht beseitigen. Die Konstanten c_1, c_2, c_4 können jetzt nicht mehr gleich 0 gesetzt werden, weil dann die Anfangswerte der Störungen nicht mehr genügend kleine Größen sind.

Auf diese Weise gehen in die Störungen Glieder ein von der Form

$$c \begin{matrix} \sin \\ \cos \end{matrix} \zeta_1$$

welche bei weiterer Entwickelung säkulare Glieder zur Folge haben.

In diesem Fall ist somit eine konvergente Entwickelung der Störungen nur für einen begrenzten Zeitraum möglich; darüber hinaus wird die Darstellung divergent und kann nichts mehr über den Ablauf des Bewegungsvorganges aussagen.

Ganz entsprechend treten in den Störungen der Bewegung von C um S Glieder auf, die mit dem Verhältnis $\frac{n_0}{n}$ multipliziert sind, da in diesen Ausdrücken ζ_0 die Integrationsvariabele ist. Setzen wir nunmehr die Massen m_1 und m_2 verschieden voraus, aber die Masse m unendlich klein, so erhalten wir wiederum eine stabile Bewegung.

C kann jetzt die Bewegung von A und B nicht stören, und diese erfolgt daher in zwei konzentrischen Kreisen um den Schwerpunkt S als Mittelpunkt. Es handelt sich nur noch um die durch A und B hervorgerufenen Störungen in der Bewegung von C. Da aber jetzt bei der Integration keine großen Faktoren auftreten, lassen sich die Konstanten wieder so bestimmen, daß die Störungsausdrücke periodische Funktionen werden; und zwar ist das Argument $(\zeta - \zeta_0 + \varphi)$.

Diese Reihen sind unbedingt konvergent und stellen zunächst wieder für den Zeitabschnitt τ die Lösung der Differentialgleichungen dar. Man schließt aber ebenso wie vorher auf die Gültigkeit der Reihen für beliebige Zeiträume.

Wir erhalten somit das weitere Resultat: *Satz II.* — Sind die Massenpunkte A, B, C gegeben mit den beliebigen Massen m_1, m_2, m,[1]) so ist die Darstellung der Bewegung nur für ein endliches Zeitintervall konvergent, wenn m endlich ist. Ist dagegen m unendlich klein und geschieht zu einer Anfangsepoche die Bewegung von A und B um ihren Schwerpunkt S in Kreisbahnen, diejenige von C um S in einer der Kreisbewegung benachbarten

[1]) Es wird indessen immer eine solche Massenverteilung vorausgesetzt, daß die Größe $\frac{n_0}{n}$ eine kleine Größe der $\frac{3}{2}^{\text{ten}}$ Ordnung ist.

Bahn,[1]) so ist diese Bewegung periodisch und bleibt auch für beliebige Zeiträume der Kreisbewegung nahe. Sind die Umlaufszeiten in den beiden Kreisbahnen U und U_0, so ist die Periode der Störungen

$$P = U - \frac{1}{1 - \frac{U}{U_0}}$$

[1]) Was unter diesem Ausdruck zu verstehen ist, enthält die Anmerkung zu S. 82.

Berichtigungen.

Seite 39 Zeile 10 lies $\int[-2J + \int Z_2\, dw]\, dw$ statt $\int[2J + \int Z_2\, dw]\, dw$
„ 44 „ 6 „ ϑ statt γ
„ 45 „ 9 „ $\frac{(m_1 + m_2)^2}{m_2^3}$ statt $\frac{(m_1 + m_2)^2}{m_3^2}$
„ 49 Anmerkung Zeile 1 lies (S. 47) statt (S. 48)
„ „ 5 „ Γ statt Γ_0
„ 51 Zeile 14 lies n_0 statt u.

Inhaltsübersicht.

	Seite
Einleitung	
I. Die Differentialgleichungen für die Bewegung der vier Massenpunkte; Aufstellung und Entwickelung der Störungsfunktion	6
II. Integration der Differentialgleichungen durch sukzessive Näherungen und unendliche Reihen	13
III. Anwendung des Vorhergehenden auf die Störungstheorie	31
IV. Entwickelung der Störungen erster Ordnung für den Fall, daß sich die vier Massenpunkte in einer Ebene bewegen	41
A. Entwickelung der Funktionen Φ, Ψ, Ω und Θ	51
B. Die Störungen von S' gegen S	55
C. Die Störungen von A gegen S und von C gegen S'	59
V. Fortsetzung der Untersuchung für drei Körper	70

Lebensabriss.

Geboren wurde ich am 12. März 1884 zu Düsseldorf. Nach vierjähriger Vorbildung auf einer Elementarschule besuchte ich das dortige städtische Gymnasium von Ostern 1894 bis Ostern 1903. Ich verließ die Schule mit dem Reifezeugnis, um Astronomie und verwandte Wissenschaften zu studieren. Meine Studien trieb ich an der Universität zu Straßburg zwei Jahre — während des zweiten Jahres genügte ich dort meiner Militärpflicht —, in Kiel während des Sommers 1905 und von da ab an der Universität zu München.